Introduction to the Glauber theory and its application

Yasuyuki Suzuki
Niigata Univ. & Riken

Outline

1. Introduction
2. Basics of potential scattering theory
3. Eikonal approximation
4. Glauber approximation for nuclear collision
5. Nucleon-nucleon profile function and calculation of phase shift function
6. Case of halo nuclei
7. Reaction cross sections
8. Elastic scattering and dynamic polarization potential
9. Breakup processes with Coulomb interaction

1. Introduction

グラウバー理論　（Roy J. Glauber, 1925-）

High-energy collision theory

Lectures in Theoretical Physics, Vol I (Interscience, New York, 1959)

1950年代の電子散乱による原子核研究に触発されて展開　　R.Hofstadter

素過程の相互作用をベースにして、複合粒子間衝突を記述　(Nobel prize1961)

グラウバー理論はアイコナール近似と断熱近似を仮定

（但しこの用語は講義録には現れない）

断面積と波動関数との関係が簡明に表現される

不安定核の研究

ハロー構造の発見以後、ドリップ線近傍核の構造の研究が

p,sd殻核領域を越えて進展中

中高エネルギー反応（核子当り、数100MeV以上の入射エネルギー）

により有用な実験結果が蓄積

講義の目標

practical, middlebrow

Structure and reactions of light exotic nuclei (Y.S., R.G.Lovas, K.Yabana, K.Varga,Taylor&Francis,2003)

中高エネルギー不安定原子核反応におけるグラウバー理論（鈴木宜之,日本物理学会誌63,2008)

quantum theory of optical coherence (1963, Nobel prize 2005)

PHYSICAL REVIEW VOLUME 131, NUMBER 6 15 SEPTEMBER 1963

Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*

ROY J. GLAUBER
Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received 29 April 1963)

Methods are developed for discussing the photon statistics of arbitrary radiation fields in fully quantum-mechanical terms. In order to keep the classical limit of quantum electrodynamics plainly in view, extensive use is made of the coherent states of the field. These states, which reduce the field correlation functions to factorized forms, are shown to offer a convenient basis for the description of fields of all types. Although they are not orthogonal to one another, the coherent states form a complete set. It is shown that any quantum state of the field may be expanded in terms of them in a unique way. Expansions are also developed

III. COHERENT STATES OF A SINGLE MODE

The next few sections will be devoted to discussing the description of a single mode oscillator. We may therefore simplify the notation a bit by dropping the mode index k as a subscript to the state vector and to the amplitude parameters and operators. To find the oscillator state $|\alpha\rangle$ which satisfies

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle, \tag{3.1}$$

Roy J. Glauber – Autobiography
1943 Santa Fe, Manhattan Project
Oppenheimer, Bethe, Feynman, Bohr, Schwinger

$$|\alpha\rangle=D(\alpha)|0$$
$$=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$$
$$=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle$$

These forms show that the average occupation number of the nth state is given by a Poisson distribution with mean value $|\alpha|^2$,

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2=\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2}. \tag{3.9}$$

Measurements of Interaction Cross Sections and Nuclear Radii in the Light p-Shell Region

PHYSICAL REVIEW LETTERS 9 DECEMBER 1985

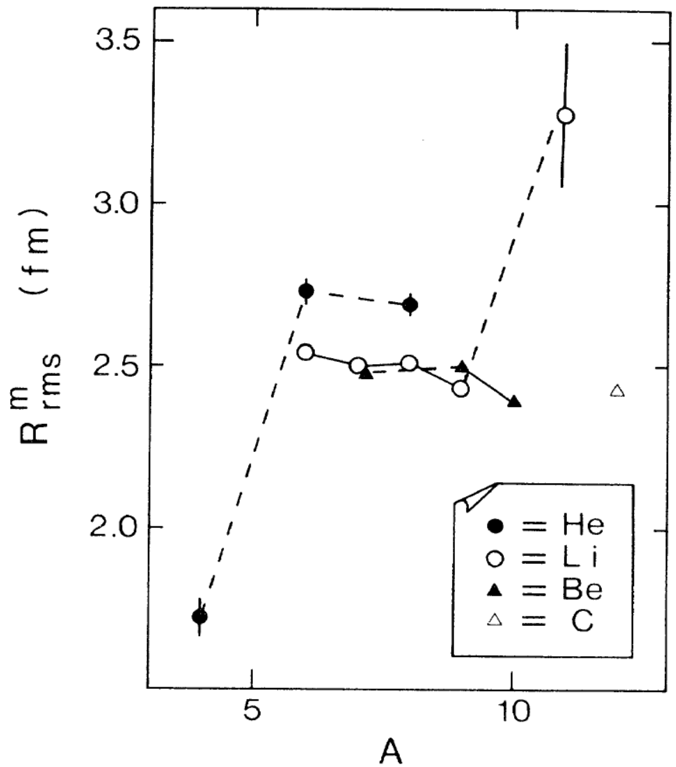
I. Tanihata,[a] H. Hamagaki, O. Hashimoto, Y. Shida, and N. Yoshikawa
Institute for Nuclear Study, University of Tokyo, Tanashi, Tokyo 188, Japan

K. Sugimoto,[b] O. Yamakawa, and T. Kobayashi
Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley,

N. Takahashi
Osaka University

^{11}Li Halo

Secondary beam!



H.H.Heckman et al. PRC17

Fragmentation of ^{4}He, ^{12}C, ^{14}N, and ^{16}O nuclei in nuclear emulsion at 2.1 GeV/nucleon MAY 1978

An empirical expression for the interaction cross section that traditionally has been used to interpret the data given in Table I is the geometrical formula first proposed by Bradt and Peters,[24]

$$\sigma_{BT} = \pi r_0^2 (A_B^{1/3} + A_T^{1/3} - b)^2, \quad (1)$$

中高エネルギー原子核反応実験で測定されたもの

Interaction cross sections
Reaction cross sections
Neutron removal cross sections
Charge-changing cross sections
Energy and momentum distributions of fragments
Angular distribution in elastic scattering
Inelastic scattering
Coulomb excitations

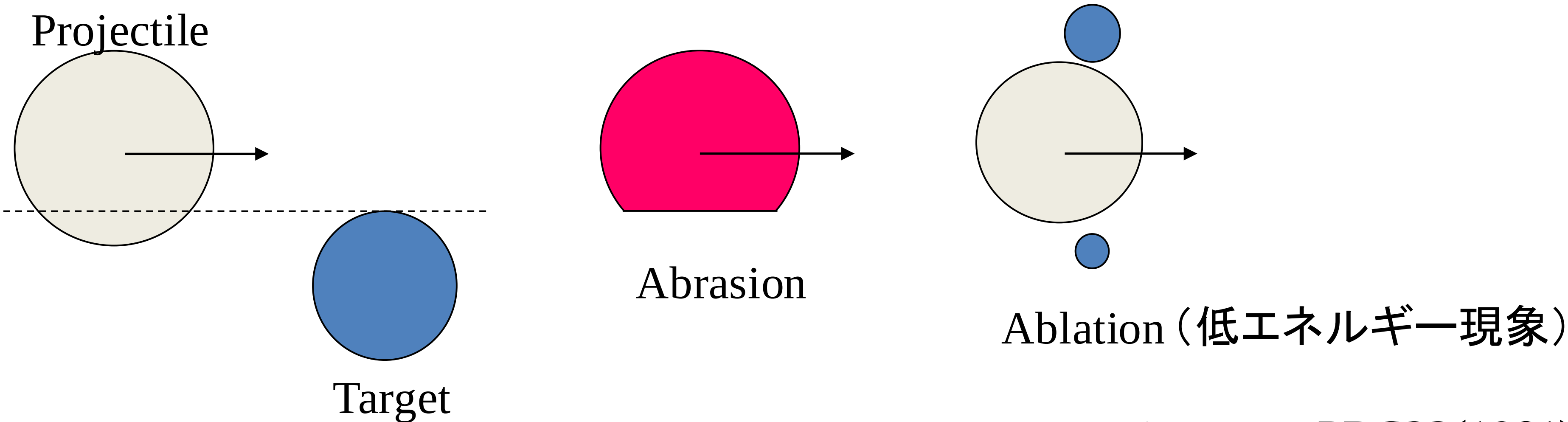
これらの諸物理量と波動関数、相互作用との関係を明らかにしたい

1992~ Galuber, eikonal模型による研究

Reaction Mechanisms of ^{11}Li at Intermediate Energy
K. Yabana, Y. Ogawa and Y. Suzuki, Nucl. Phys. A539, 295 (1992)
Break-up Effect on the Elastic Scattering and the Optical Potential of ^{11}Li
K. Yabana, Y. Ogawa and Y. Suzuki, Phys. Rev. C45, 2909 (1992)
Glauber Model Analysis of the Fragmentation Reaction Cross Sections of ^{11}Li
Y. Ogawa, K. Yabana and Y. Suzuki, Nucl. Phys. A543, 722 (1992)

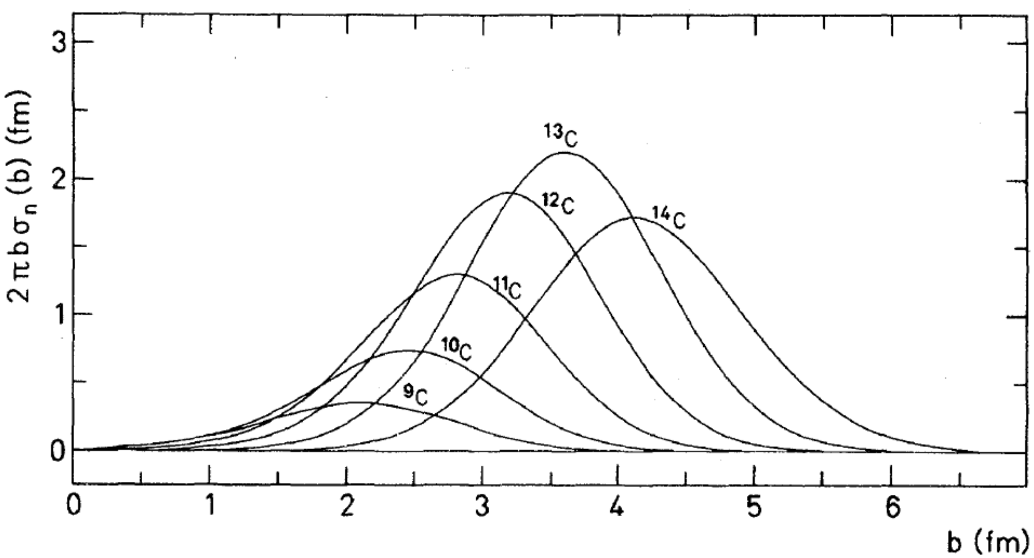
1989.2-1990.1 ミシガン大学滞在

Abrasion-Ablation model for relativistic heavy-ion reactions

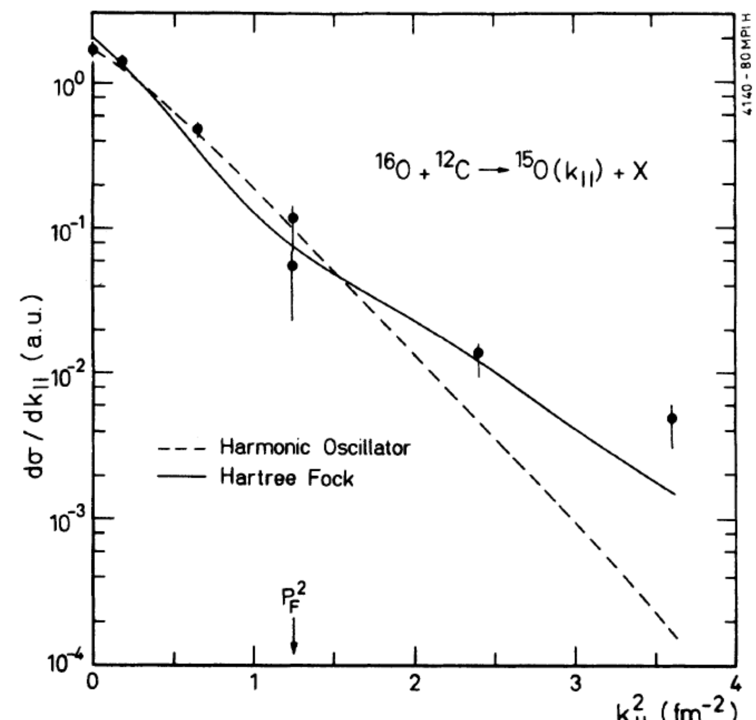


J.Hüfner et al. Glauber theory

$^{16}O + {}^{9}Be \rightarrow {}^{A}C + X$ PRC12(1975)



$^{16}O + \text{target} \rightarrow {}^{15}O + X$ PRC23(1981)



1. **Introduction**
2. Basics of potential scattering theory
3. Eikonal approximation
4. Glauber approximation for nuclear collision
5. Nucleon-nucleon profile function and calculation of phase shift function
6. Case of halo nuclei
7. Reaction cross sections
8. Elastic scattering and dynamic polarization potential
9. Breakup processes with Coulomb interaction

2. Basics of potential scattering theory

2.1 Key words: 散乱振幅、断面積、フラックスの保存、光学定理、位相差

球対称ポテンシャル散乱、或は2粒子衝突の相対運動の方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad E = \hbar^2 k^2/2m$$

境界条件 $$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{ikz} + f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \qquad (r \to \infty)$$ $f(\theta)$ 散乱振幅

ポテンシャルの詳細によらない一般論

確率密度 $$\rho = |\psi(\boldsymbol{r})|^2$$

確率流密度 $$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right)$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{inc}} = v\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \boldsymbol{j}_{\mathrm{out}} = v\hat{\boldsymbol{r}}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \qquad v = \hbar k/m$$

$\hat{\boldsymbol{a}}$ は単位ベクトル

微分断面積 $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

複素ポテンシャル（非弾性散乱、フラグメンテーション等を記述）の場合

時間依存のシュレーディンガー方程式から $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \dfrac{2}{\hbar} \rho \, \mathrm{Im}\, V(r)$

定常状態の解では第1項＝0

フラックスの保存

$$\boxed{\int_V d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \int_S dS\, \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{2}{\hbar} \int_V d\boldsymbol{r}\, \rho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{Im}\, V(r)}$$

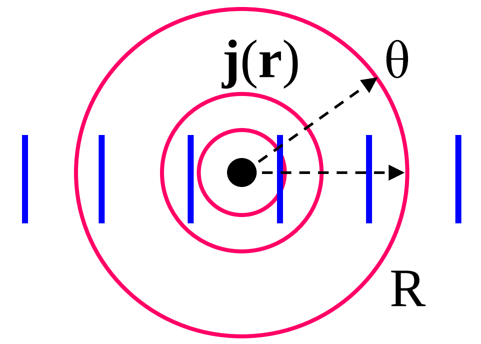
(ガウスの定理)

$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \partial / \partial r$ を用いてフラックスの計算を行う

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{j} &= v \cos\theta + v \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + v\, \mathrm{Re} \left[\frac{1 + \cos\theta}{r} f(\theta) \mathrm{e}^{ikr(1-\cos\theta)} \right] \\ &\quad - v\, \mathrm{Im} \left[\frac{1}{kr^2} f(\theta) \mathrm{e}^{ikr(1-\cos\theta)} \right]. \end{aligned}}$$

右辺第3項、第4項は入射波と散乱波の干渉項

干渉項はR→∞のとき、θ= 0でのみ寄与することがわかる



フラックスの計算

十分大きな半径Rの球面Sでフラックスを計算

$$dS = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

第3項は以下のようになる

$$\int_S dS\, \frac{1+\cos\theta}{R} f(\theta) \mathrm{e}^{ikR(1-\cos\theta)} = 2\pi R \int_{-1}^{+1} dt\, (1+t) \tilde{f}(t) \mathrm{e}^{ikR(1-t)}$$

Rが十分大きいときは、
θ=0 (t=1)でのみ積分に寄与

$$= \frac{4\pi i}{k} f(0) + \frac{2\pi}{ik} \int_{-1}^{+1} dt \left[\frac{d}{dt}(1+t)\tilde{f}(t)\right] \mathrm{e}^{ikR(1-t)}$$

右辺第1項のみ寄与、第2項は1/Rのオーダー

第4項は第3項の1/Rのオーダー

$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{j}$ の第1項は球面積分で消え、第2項とf(0)の項のみ残る

$$\boxed{\int_S dS\, \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{j} = v \left[\int d\Omega\, |f(\theta)|^2 - \frac{4\pi}{k} \,\mathrm{Im}\, f(0)\right]}$$

実数ポテンシャルのとき、$\int_S dS\, \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{j}$ はゼロ　　$\sigma_{\mathrm{tot}} = \sigma_{\mathrm{el}} = \frac{4\pi}{k} \,\mathrm{Im}\, f(0)$

複素ポテンシャルのとき $\boxed{\int_V d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = \int_S dS\, \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{j} \;=\; \frac{2}{\hbar}\int_V d\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{Im}\,V(r)}$

この量を $v\sigma_{\mathrm{abs}} = -\int_S dS\,\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{j}$ （吸収断面積）と定義する

$$\sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{2}{\hbar v}\int_V d\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})[-\mathrm{Im}V(r)]$$

（29頁参照）

一般化された光学定理 $\sigma_{\mathrm{tot}} = \sigma_{\mathrm{el}} + \sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,f(0)$

部分波展開 $\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)R_l(r)P_l(\cos\theta)$

$$R_l(r) \propto \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{1}{2}\pi + \delta_l) \quad (r\to\infty)$$

Phase shift

これを境界条件の式と比べて散乱振幅の部分波展開式を得る

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\mathrm{e}^{2i\delta_l}-1)P_l(\cos\theta)$$

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)|1-\mathrm{e}^{2i\delta_l}|^2 \qquad \sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)(1-|\mathrm{e}^{2i\delta_l}|^2)$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \sigma_{\mathrm{el}} + \sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)2\mathrm{Re}(1-\mathrm{e}^{2i\delta_l}) = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}f(0)$$

2.2 Key words: Lippmann-Schwinger方程式、グリーン関数

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad E = \hbar^2 k^2/2m$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{ikz} + f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \qquad (r \to \infty)$$

散乱の境界条件＋シュレーディンガー方程式と等価な積分方程式

$$\left[E - \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\right)\right]\psi(\boldsymbol{r}) = V(r)\,\psi(\boldsymbol{r})$$

Lippmann-Schwinger方程式

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{ikz} + \int d\boldsymbol{r}'\, G^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')V(r')\psi(\boldsymbol{r}')$$

自由粒子のグリーン関数

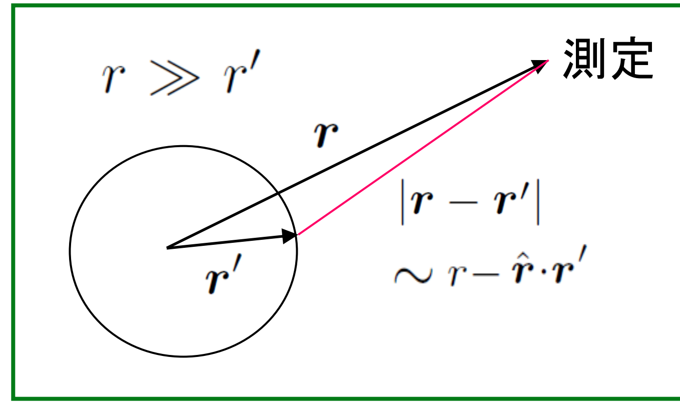
$$\left[E - \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\right)\right]G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$G^{(\pm)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

See, e.g., L.I. Schiff
Quantum Mechanics (2nd edition)
pp. 162-164

$$r \to \infty$$

$$G^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \sim -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{ikr-ik\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'}$$



$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}\int d\boldsymbol{r}'\,\mathrm{e}^{-ik\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'}V(r')\psi(\boldsymbol{r}')$$

散乱振幅の積分表示 $f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}'\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}\underline{V(r')\psi(\boldsymbol{r}')}$

散乱振幅の計算には、ポテンシャルが消えない領域で波動関数を精度よく求めればよく、境界条件を満たさないものを用いても良い
仮に、ポテンシャルが弱く平面波からの歪みを無視できれば

1次ボルン近似 $\psi(\boldsymbol{r}') = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$ $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ （移行運動量）

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}'\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}V(\boldsymbol{r}')$$ （フーリエ変換）

PHYSICAL REVIEW VOLUME 79, NUMBER 3 AUGUST 1, 1950

Variational Principles for Scattering Processes. I

B. A. LIPPMANN
Nucleonics Division, Naval Research Laboratory, Washington, D. C.

AND

JULIAN SCHWINGER
Harvard University, Cambridge, Massachusetts

Lippmann-Schwinger 論文

(Received April 10, 1950)

A systematic treatment is presented of the application of variational principles to the quantum theory of scattering.

Starting from the time-dependent theory, a pair of variational principles is provided for the approximate calculation of the unitary (collision) operator that describes the connection between the initial and final states of the system. An equivalent formulation of the theory is obtained by expressing the collision operator in terms of an Hermitian (reaction) operator; variational principles for the reaction operator follow. The time-independent theory, including variational principles for the operators now used to describe transitions, emerges from the time-dependent theory by restricting the discusson to stationary states. Specialization to the case of scattering by a central force field establishes the connection with the conventional phase shift analysis and results in a variational principle for the phase shift.

As an illustration, the results of Fermi and Breit on the scattering of slow neutrons by bound protons are deduced by variational methods.

グリーン関数
Resolvent

$$\Psi_a{}^{(\pm)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a\pm i\epsilon-H_0}H_1\Psi_a{}^{(\pm)}. \qquad (1.61)$$

These equations provide a time-independent formulation of the scattering problem, in which the small positive or negative imaginary addition to the energy serves to select, automatically, outgoing or incoming scattered waves.

2.3　付録：境界条件を満たさない波動関数を用いて散乱を解く例

Spectroscopic amplitude (SA) や位相差の計算に束縛状態の波動関数を用いることを試みる

Nuclear Physics A 823 (2009) 1–15

Phase-shift calculation using continuum-discretized states

Y. Suzuki [a], W. Horiuchi [b,*], K. Arai [c]

SA y(r) の定義と満たすべき方程式

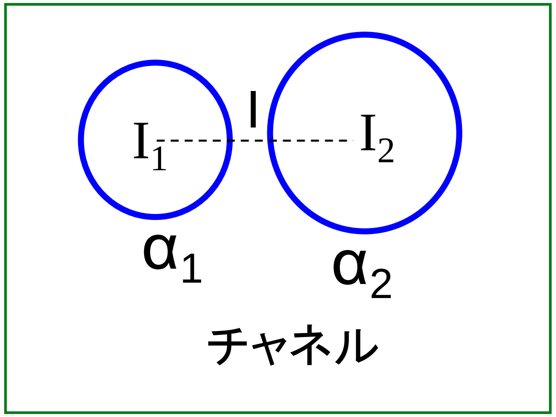
$$y(r) = \langle \Phi_{cJM}(r) | \Psi_{JM} \rangle$$

$$\Phi_{cJM}(r) = \left[\left[\psi_{I_1}(\alpha_1) \psi_{I_2}(\alpha_2) \right]_I Y_\ell(\hat{\boldsymbol{r}}_c) \right]_{JM} \frac{\delta(r_c - r)}{r_c r}.$$

シュレーディンガー方程式をチャネルcに射影

$$\langle \Phi_{cJM}(r) | H | \Psi_{JM} \rangle = E \langle \Phi_{cJM}(r) | \Psi_{JM} \rangle$$

$$H = H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2} + T_c + V_c$$



２原子核間のチャネルcで働く相互作用　$V_c = \sum_{i \in \alpha_1, j \in \alpha_2} v_{ij}$

SAの漸近的振舞い $y(r \to \infty)$ から位相差が決まる

SAが満たす方程式をは以下のように与えられる
ここで、原子核間の局所ポテンシャルU の選び方は任意

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}U(r)+k^2\right]y(r)=\frac{2\mu}{\hbar^2}z(r)$$

$$z(r)=\left\langle\Phi_{cJM}(r)\middle|V_c-U\middle|\Psi_{JM}\right\rangle$$

グリーン関数を用いて境界条件を満足するSAを得る

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}U(r)+k^2\right]G(r,r')=\frac{1}{rr'}\delta(r-r')$$

$$G(r,r')=\begin{cases}kv(r)h(r') & r\leqslant r'\\ kh(r)v(r') & r\geqslant r'\end{cases}$$

See, e.g., L.I. Schiff
pp. 166-167

$$y(r)=\lambda v(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\int_0^\infty G(r,r')\,z(r')\,r'^2\,dr'$$

V_c-U が r の大きいところで消えるようにU を選べば、
Ψ_{JM} は相互作用領域でのみ高精度で記述されていればよい
この近似解 Ψ_{JM} からλ, z(r) を決定できる.
結果として正しい漸近系を持つ Ψ_{JM} が得られる

Comparison of the phase shifts of $\alpha + n$ scattering

近似解を得る（CDCCと同様の考えで、連続状態を2乗可積分関数で展開）

αと中性子間の相対運動をガウス基底で展開
連続状態を離散化したエネルギーと波動関数を求める

$$\Psi_{JM} = \sum_{i=1}^{K} C_i \Psi_i$$

微視的模型　反対称化演算子

$$\mathcal{A} = \frac{1}{A!}\sum_{P}(-1)^{\epsilon(P)}P$$

$$\Psi_i = \mathcal{A}\left\{[[\psi_0(\alpha)\psi_{1/2}(n)]_{1/2}Y_\ell(\hat{\boldsymbol{r}})]_{JM}\, r^\ell \mathrm{e}^{-\beta_i r^2}\right\}$$

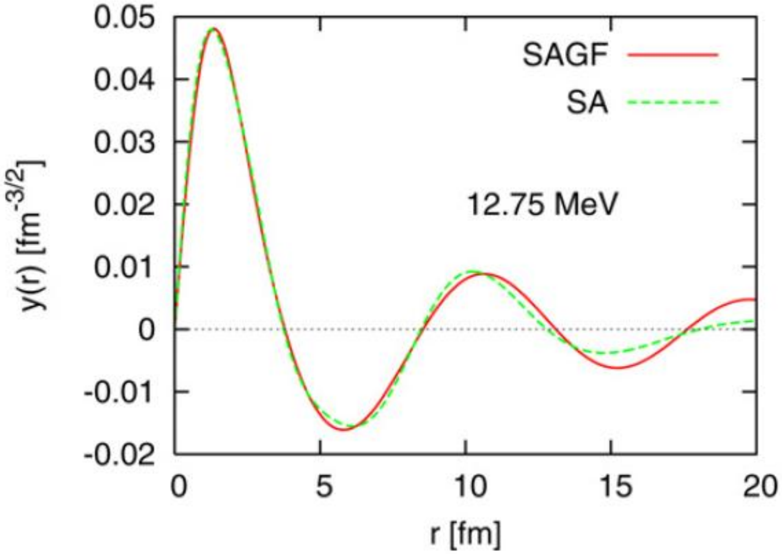
$$\sum_{j=1}^{K}[\langle\Psi_i|H|\Psi_j\rangle - E\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle]C_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, K)$$

Resonating Group Method (RGM)

$$\Psi_{JM} = \mathcal{A}\left\{[[\psi_0(\alpha)\psi_{1/2}(n)]_{1/2}Y_\ell(\hat{\boldsymbol{r}})]_{JM}\, u(r)\right\}$$

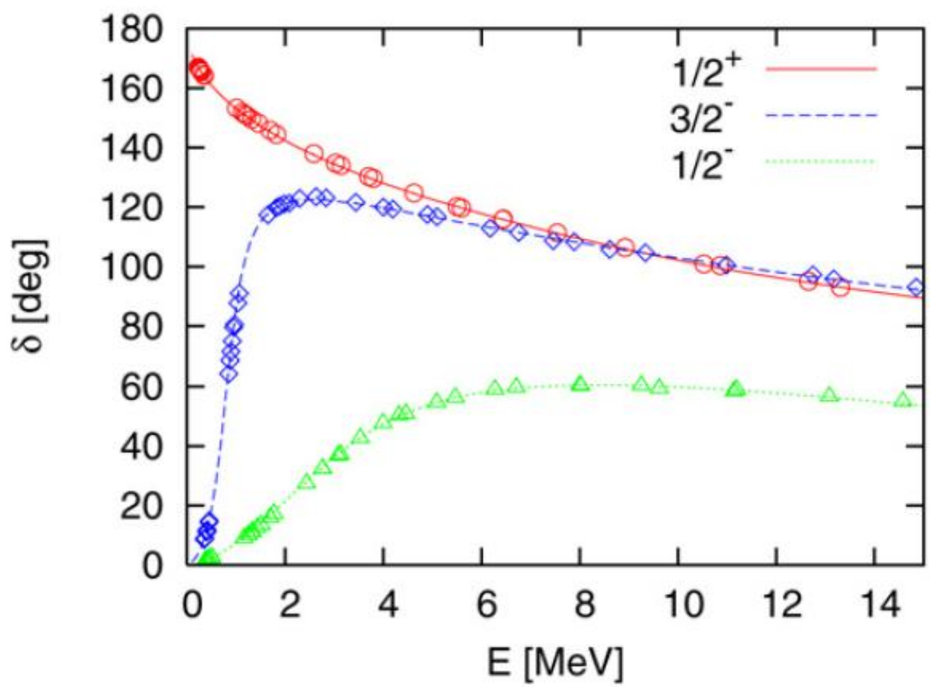
この仮定から、u(r)に対する微積分方程式を
境界条件に従って解き、位相差を得る（single channel近似でexact）

MN力(中心力＋スピン軌道力)、 U=0

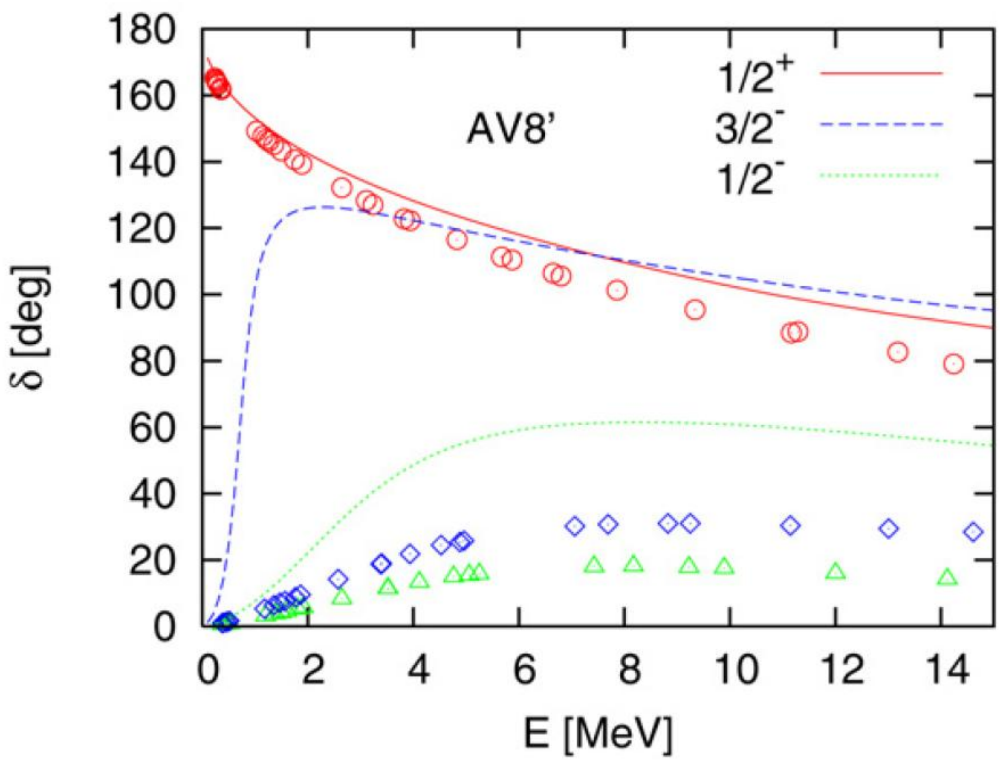


束縛状態近似とグリーン関数で修正した解との比較

高精度のR-行列計算の位相差と離散化波動関数によるものとの比較
S波、P波いずれも一致



現実的AV8'力(強い中心斥力、テンソル力を含む)の場合



現実的核力の結果を実験データと比較:
S波散乱はほぼ良い
P波散乱は引力効果が足りない

αの歪み
パウリ原理
3体力

「Coupled-channelへ拡張する、任意のエネルギーで散乱解を得る」課題に応えるには？

Solving a coupled-channels scattering problem by adding confining potentials

Y. Suzuki[a,*], D. Baye[b], A. Kievsky

Nuclear Physics A 838 (2010) 20–37

1. Introduction

2. Basics of potential scattering theory

2.1 散乱振幅、断面積、フラックスの保存、光学定理、位相差

2.2 Lippmann-Schwinger方程式、グリーン関数

2.3 付録：境界条件を満たさない波動関数を用いて散乱を解く例

3. Eikonal approximation
4. Glauber approximation for nuclear collision
5. Nucleon-nucleon profile function and calculation of phase shift function
6. Case of halo nuclei
7. Reaction cross sections
8. Elastic scattering and dynamic polarization potential
9. Breakup processes with Coulomb interaction

3. Eikonal approximation

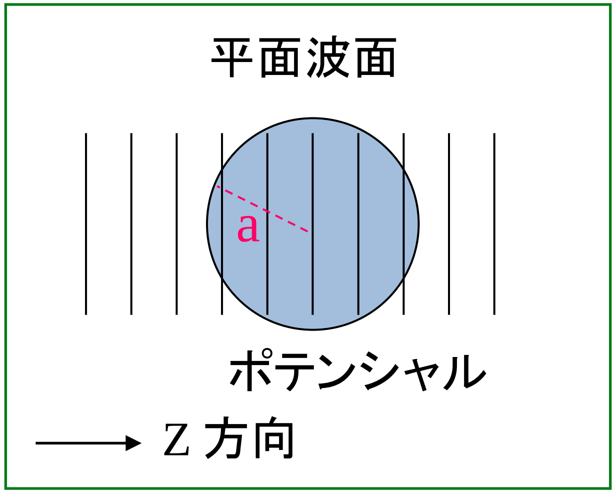
3.1 Key words: 高エネルギー近似、衝突係数表示、位相差関数

ポテンシャル問題で散乱解を求めるのは容易だが、複合粒子系の
散乱問題を解くことは容易ではない
相対運動と複合粒子の励起が分離せず結合する
相互作用が強い場合はボルン近似は無力
弾性散乱でも、特に弱く結合した複合粒子の場合には、
その励起効果を無視できない
終状態は一般に多岐にわたり、入射エネルギーの高いときには
個々の反応生成断面積を計算することは難しい

高エネルギー近似のポテンシャル散乱

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{ikz}\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$$

入射波の高い振動は平面波で表現され、
ずれの部分 $\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ はそれに比べて激しく
振動しない



$\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ が従う方程式 $$\left(vp_z + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}) + V(r)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$vp_z\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ に比べて $(\boldsymbol{p}^2/2m)\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ を無視できる条件

1. 入射運動量 p からの揺らぎが小さい。運動量の不確定さ δp

$$p = \hbar k = mv \qquad \delta p \sim \hbar/a \qquad \frac{\delta p}{p} \approx \frac{1}{ka} \ll 1$$

入射波長 $\frac{2\pi}{k}$ はポテンシャルのレンジより十分に小さいこと

2. 運動量移行 Δp が小さい。 力積の関係から

$$\Delta p = F\Delta t \simeq V/a \cdot 2a/v \qquad \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{2V}{mv^2} = \frac{V}{E} \ll 1$$

入射エネルギーはポテンシャルの深さより十分に大きいこと

$ka \cdot V/E = \underline{2Va/\hbar v}$ の大きさには条件なし。(cf. ボルン近似. 27頁参照)

E(MeV)で入射する核子の波長 $\sim 30/\sqrt{E}$ (fm)

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}(x,y,z) = \frac{1}{i\hbar v}V(x,y,z)\hat{\psi}(x,y,z)$$

1 階の偏微分方程式。　　初期条件 $\hat{\psi}(x,y,z\to -\infty) = 1$

$$\longrightarrow \quad \hat{\psi}(x,y,z) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz'\, V(x,y,z')\right]$$

アイコナール近似の波動関数

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \exp\left[ikz + \frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz'\, V(x,y,z')\right] \qquad \boldsymbol{b} = (x,\, y,\, 0)$$

波数とポテンシャルとの関係 $\quad \frac{\hbar^2[k'(\boldsymbol{r}')]^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}') = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$(k'(\boldsymbol{r}') - k)(k'(\boldsymbol{r}') + k) = -\frac{2m}{\hbar^2}V(\boldsymbol{r}')$$

$$k'(\boldsymbol{r}') + k \approx 2k \qquad k'(\boldsymbol{r}') - k = -\frac{1}{\hbar v}V(\boldsymbol{r}')$$

衝突径数 b がポテンシャルのレンジより大きいとき、アイコナール近似解は平面波！　境界条件を満たさず、$r\to\infty$ として散乱振幅は計算できない

物理におけるアイコナールの由来　$\epsilon\iota\kappa\acute{\omega}\nu$

アイコナール

H. Bruns (1895)

電磁場の方程式　$\left[\nabla^2 + k^2 n^2(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = 0$　$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

波長が屈折率の変化に比べて十分に小さいとき　$\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\phi(\boldsymbol{r})}$

シュレーディンガー方程式　$\left[\nabla^2 + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V(\boldsymbol{r}))\right]\psi(\boldsymbol{r}) = 0$　への適用

高速荷電粒子の散乱理論 I　遮蔽クーロン場の単一散乱　(1947)

Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen I

Einzelstreuung am abgeschirmten Coulomb-Feld [1]

Von Gert Molière

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen

(Z. Naturforschg. 2a, 133—145 [1947]; eingegangen am 24. September 1946)

$$\psi(x_0, \varrho) = \exp\left(i\left[k_0 x_0 + \Phi(\varrho)\right]\right)$$

$$\Phi(\varrho) = -\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{+\infty} V\left(\sqrt{x^2+\varrho^2}\right)dx = -\frac{2}{\hbar v}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{V(r)\,r\,dr}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}$$

アイコナール近似の波動関数はポテンシャル領域でよい近似として
散乱振幅を計算できる

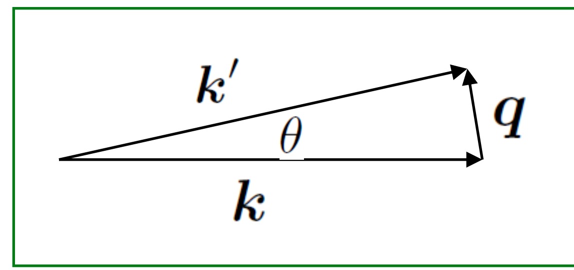
$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}'\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}V(r')\psi(\boldsymbol{r}') \qquad \psi(\boldsymbol{r}) = \exp\left[ikz + \frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz'\,V(x,y,z')\right]$$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}\,\exp\left[\underline{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r} + ikz} + \frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz'\,V(x,y,z')\right]V(r)$$

(zに依らない!)

$$-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r} + ikz = -i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r} + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = -i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} \approx -i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{b} = (x,\ y,\ 0)$$

$$\boldsymbol{k}'^2 - \boldsymbol{k}^2 = (\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{q} = 0$$



高エネルギー散乱ではθは小さい $\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q} \approx 0$

$\boldsymbol{q}$ は xy 面のベクトル $\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ 0)$

Z積分実行可能

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,V(x,y,z)\mathrm{e}^{\frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z}dz'\,V(x,y,z')}$$

$$= i\hbar v\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z}dz'\,V(x,y,z')}\right]_{z=-\infty}^{z=+\infty}$$

アイコナール近似の散乱振幅と位相差関数

$$f(\theta) = \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \left[1 - \mathrm{e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}\right] \qquad q = 2k\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\chi(\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, V(\boldsymbol{b} + z\hat{\boldsymbol{z}})$$

Phase-shift function

球対称ポテンシャルの場合、位相差関数は $\boldsymbol{b}$ の方向には依存せず、角度積分実行可能

$$f(\theta) = ik\int_0^\infty db\, b\, J_0(qb)\left[1 - \mathrm{e}^{i\chi(b)}\right]$$

$$\begin{aligned}
&\int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} f(b) \\
&= \int_0^\infty db\, b f(b) \int_0^{2\pi} d\phi\, \mathrm{e}^{-iqb\cos\phi} \\
&= 2\int_0^\infty db\, b f(b) \int_0^{\pi} d\phi\, \mathrm{e}^{-iqb\cos\phi} \\
&= 2\pi \int_0^\infty db\, b f(b) J_0(qb)
\end{aligned}$$

部分波展開との対応

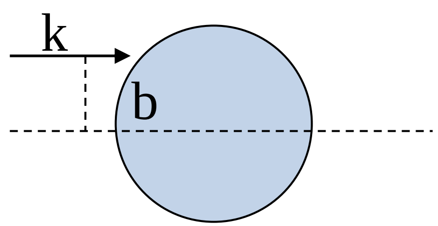
$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\mathrm{e}^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta)$$

$$l + \frac{1}{2} = kb \qquad \sum_\ell \to k\int db$$

$$P_l\left(\cos\frac{x}{l}\right) \sim J_0(x) \qquad (l \to \infty)$$

$$x = l\theta \approx 2(l + \tfrac{1}{2})\sin\frac{\theta}{2} = 2kb\sin\frac{\theta}{2} = qb$$

$\chi(b) = 2\delta_l$ の対応



ボルン近似との関係

$|\chi(\boldsymbol{b})|$ は $2Va/\hbar v$ の程度

$|\chi(\boldsymbol{b})| \ll 1$ なら　1次ボルン近似に帰着

$$f(\theta) \approx \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}[-i\chi(\boldsymbol{b})] = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}V(r)$$

原子核の散乱では一般にこの条件は成り立たない

付録: スピン一軌道ポテンシャルがある場合のアイコナール近似

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V_{\mathrm{c}}(r) + V_{\mathrm{s.o.}}(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

散乱振幅演算子　$\hat{f}(\theta,\phi) = f(\theta) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\, g(\theta)$

散乱面に垂直なベクトル

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'|}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{m'}\sum_{m}|\langle\tfrac{1}{2}m'|\hat{f}|\tfrac{1}{2}m\rangle|^2 = |f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2$$

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \rightarrow k\boldsymbol{b}\times\hat{\boldsymbol{z}} \qquad f(\theta) = ik\int_0^\infty db\, bJ_0(qb)\left\{1 - \mathrm{e}^{i\chi_{\mathrm{c}}(b)}\cos\left[kb\chi_{\mathrm{s.o.}}(b)\right]\right\}$$

$$g(\theta) = ik\int_0^\infty db\, bJ_1(qb)\,\mathrm{e}^{i\chi_{\mathrm{c}}(b)}\sin\left[kb\chi_{\mathrm{s.o.}}(b)\right]$$

3.2　Key words:　諸断面積、光学定理、位相差関数の例

立体角の積分を運動量移行の積分に変換　　$q = 2k\sin\frac{\theta}{2}$

$$d\boldsymbol{q} = dq_x dq_y = q\,dq\,d\phi$$
$$= k^2 \sin\theta d\theta d\phi = k^2\,d\Omega$$

全弾性散乱断面積

$$\sigma_{\rm el} = \int d\Omega\,|f(\theta)|^2 \qquad\qquad P_{\rm el}(\boldsymbol{b}) = |1-\mathrm{e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}|^2$$

$$= \int \frac{d\boldsymbol{q}}{k^2}\left|\frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{b}\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\left[1-\mathrm{e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}\right]\right|^2 = \int d\boldsymbol{b}\left|1-\mathrm{e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}\right|^2$$

ここで $\displaystyle\int d\boldsymbol{q}\left|\int d\boldsymbol{b}\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}F(\boldsymbol{b})\right|^2$

$$= \int d\boldsymbol{q}\int d\boldsymbol{b}\,\underline{\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}}F(\boldsymbol{b})\int d\boldsymbol{b}'\,\underline{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}'}}F^*(\boldsymbol{b}')$$

$$= (2\pi)^2\int d\boldsymbol{b}F(\boldsymbol{b})\int d\boldsymbol{b}'F^*(\boldsymbol{b}')\delta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}') = (2\pi)^2\int d\boldsymbol{b}|F(\boldsymbol{b})|^2$$

全断面積と光学定理

1. 光学定理から $\sigma_{\rm tot} = (4\pi/k)\,{\rm Im}\,f(0)$

アイコナール振幅を用いれば $\sigma_{\rm tot} = \displaystyle\int d\boldsymbol{b}\, 2\left[1 - {\rm Re}\,{\rm e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}\right]$

2. $\sigma_{\rm tot} = \sigma_{\rm el} + \sigma_{\rm abs}$ から (cf. $\sigma_{\rm abs} = \dfrac{2}{\hbar v}\displaystyle\int_V d\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})[-{\rm Im}V(r)]$)

吸収断面積

$$\sigma_{\rm abs} = \frac{2}{\hbar v}\int_V d\boldsymbol{r}\,[-{\rm Im}\,V(r)]\left|{\rm e}^{\frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z}dz'\,V(x,y,z')}\right|^2$$

$$= \frac{2}{\hbar v}\int_V d\boldsymbol{r}\,[-{\rm Im}\,V(r)]\,{\rm e}^{\frac{2}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z}dz'\,{\rm Im}\,V(x,y,z')}$$

$$= \int dx\int dy\left[-{\rm e}^{\frac{2}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z}dz'\,{\rm Im}\,V(x,y,z')}\right]_{z=-\infty}^{z=+\infty}$$

$$= \int d\boldsymbol{b}\left[1 - |{\rm e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}|^2\right].$$

$$P_{\rm abs}(\boldsymbol{b}) = 1 - |{\rm e}^{i\chi(\boldsymbol{b})}|^2$$

これに $\sigma_{\rm el}$ を加えれば、1 の結果と同じになる

アイコナール振幅は光学定理を満たす！

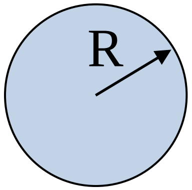
アイコナール近似の断面積は部分波展開の表式と対応していることに注意

簡単な例

1. Sharp cut-off 模型

Heaviside関数

$$e^{i\chi(\boldsymbol{b})} = H(b-R) \equiv \begin{cases} 0 & b < R \\ 1 & b \geq R \end{cases}$$



$$f(\theta) = ik\int_0^R db\, b J_0(qb) = ikR^2\frac{J_1(qR)}{qR}$$ （Fraunhofer回折振幅）

弾性散乱の角分布は $qR \simeq 3.83 \simeq kR\theta$ でdip

$$\sigma_{\rm el} = \int d\boldsymbol{b}\,|1-e^{i\chi(\boldsymbol{b})}|^2 = \pi R^2,$$

$$\sigma_{\rm abs} = \int d\boldsymbol{b}\left[1-|e^{i\chi(\boldsymbol{b})}|^2\right] = \pi R^2$$

$$\sigma_{\rm tot} = \sigma_{\rm el} + \sigma_{\rm abs} = 2\pi R^2.$$

実際は核表面でのぼやけがある

具体的応用 A. Kohama, K. Iida, K. Oyamatsu, PRC72 (2005)

陽子-原子核反応により、原子核の核半径Rを評価し、
弾性散乱と全反応断面積との関係をみる

弾性散乱の角分布　$|f(\theta)|^2 \sim \left|\frac{J_1(qR)}{qR}\right|^2$

（クーロン力の効果は無視できる）

角分布の最初のピークは

$$xJ_1'(x) - J_1(x) = 0 \qquad x = qR = 5.13...$$

$$R = 5.13.../2k\sin(\theta_M/2)$$

このとき、陽子-原子核反応の全反応断面積は

$$\sigma_{\rm abs} = \sigma_{\rm reac} \approx \pi R^2$$

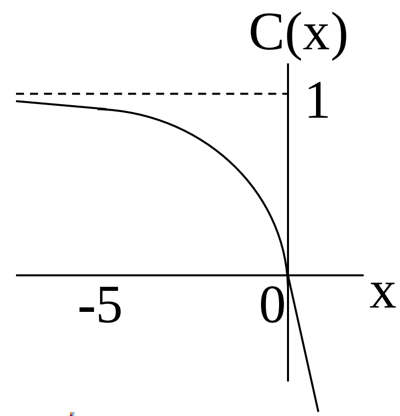
2. 箱型ポテンシャル

$$V(r) = (V_0 + iW_0)H(R-r)$$

$$\chi(b) = -\frac{2}{\hbar v}(V_0 + iW_0)\sqrt{R^2 - b^2}H(R-b)$$

$$\sigma_{\rm abs} = \pi R^2 C(x) \qquad x = 4W_0 R/\hbar v$$

$$C(x) = 1 - \frac{2}{x^2}\left[(x-1)e^x + 1\right]$$



$$\sigma_{\rm tot} = 2\pi R^2\,{\rm Re}\,C(z) \qquad z = 2(W_0 - iV_0)R/\hbar v$$

3. クーロンポテンシャル

$$V(r) = Ze^2/r \qquad \chi_{\rm C}(b) = -\frac{Ze^2}{\hbar v}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \log\left|2x + 2\sqrt{x^2+c}\right|$$

Log発散！　長距離力のため、大きなｂに対しても位相差は消えない

大きな半径aでクーロン力をcut off（遮蔽 Coulombポテンシャル）

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} H(a-r)$$

$$\chi_C(b) = -\frac{Ze^2}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{H(a-\sqrt{z^2+b^2})}{\sqrt{z^2+b^2}} = -\frac{2Ze^2}{\hbar v}\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} dz \frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}$$

$$\chi_C(b) = -\frac{2Ze^2}{\hbar v} H(a-b) \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$$= \frac{2Ze^2}{\hbar v}\left[\ln\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \ldots\right] \approx 2\eta \ln\frac{kb}{2ka} \qquad \eta = Ze^2/\hbar v$$

$\rightarrow \underline{2\eta \ln kb}$ （有効クーロン位相差）

アイコナール近似のクーロン散乱振幅

$1-\mathrm{e}^{i\chi_C(b)} \longrightarrow 1-(kb)^{2i\eta}$ 第一項はθ= 0でのみ寄与（26頁の積分公式参照）

$$f_C(\theta) = -\frac{2k\eta}{q^2}\mathrm{e}^{\underline{-2i\eta\ln(qa)}+2i\sigma_0} \qquad (\theta \neq 0) \qquad \sigma_0 = \arg\Gamma(1+i\eta)$$

Rutherford 振幅 $F_C(\theta)$ との違い： $\underline{-2i\eta\ln(\sin\theta/2)}$ に代えればよい

$\mathrm{e}^{-2i\eta\ln(2ka)}$ の一定のphaseだけ違う。
微分断面積はcut off 半径によらず、Rutherfordの公式と一致
アイコナール近似で正しい結果が得られる

4. クーロン力と短距離力の2ポテンシャル問題

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} H(a-r) + V_{\rm N}(r)$$

$$f(\theta) = \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \left[1 - \mathrm{e}^{i\chi_{\rm C}(b) + i\chi_{\rm N}(b)}\right]$$

位相差関数は加算的！

$$= \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \left[1 - \mathrm{e}^{i\chi_{\rm C}(b)}\right] + \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \mathrm{e}^{i\chi_{\rm C}(b)} \left[1 - \mathrm{e}^{i\chi_{\rm N}(b)}\right]$$

$$= f_C(\theta) + \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \mathrm{e}^{2i\eta[\ln(kb) - \ln(2ka)]} \left[1 - \mathrm{e}^{i\chi_{\rm N}(b)}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-2i\eta\ln(2ka)} \left\{ F_C(\theta) + \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b} + \underline{2i\eta\ln(kb)}} \left[1 - \mathrm{e}^{i\chi_{\rm N}(b)}\right] \right\}$$

a-independent　　Coulomb phase

第2項はCoulomb-nuclear干渉(分け方はユニークではない)

微分断面積　$d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2$　はcut off半径に依らない

具体例

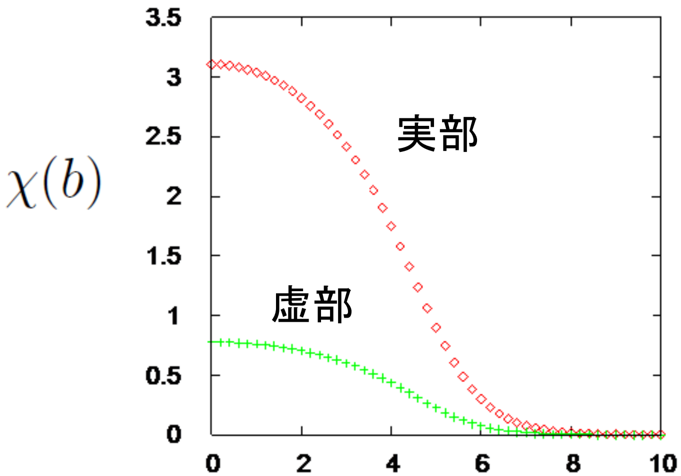
中性子散乱　E=200 MeV

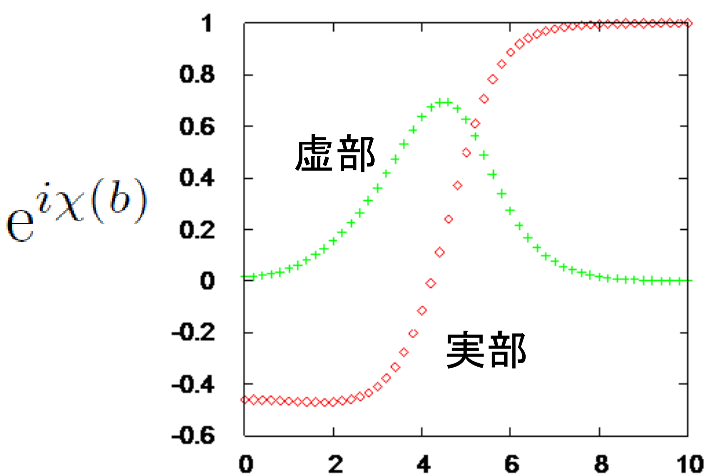
$$V(r)=(V_0+iW_0)/(1+e^{(r-R)/a})$$

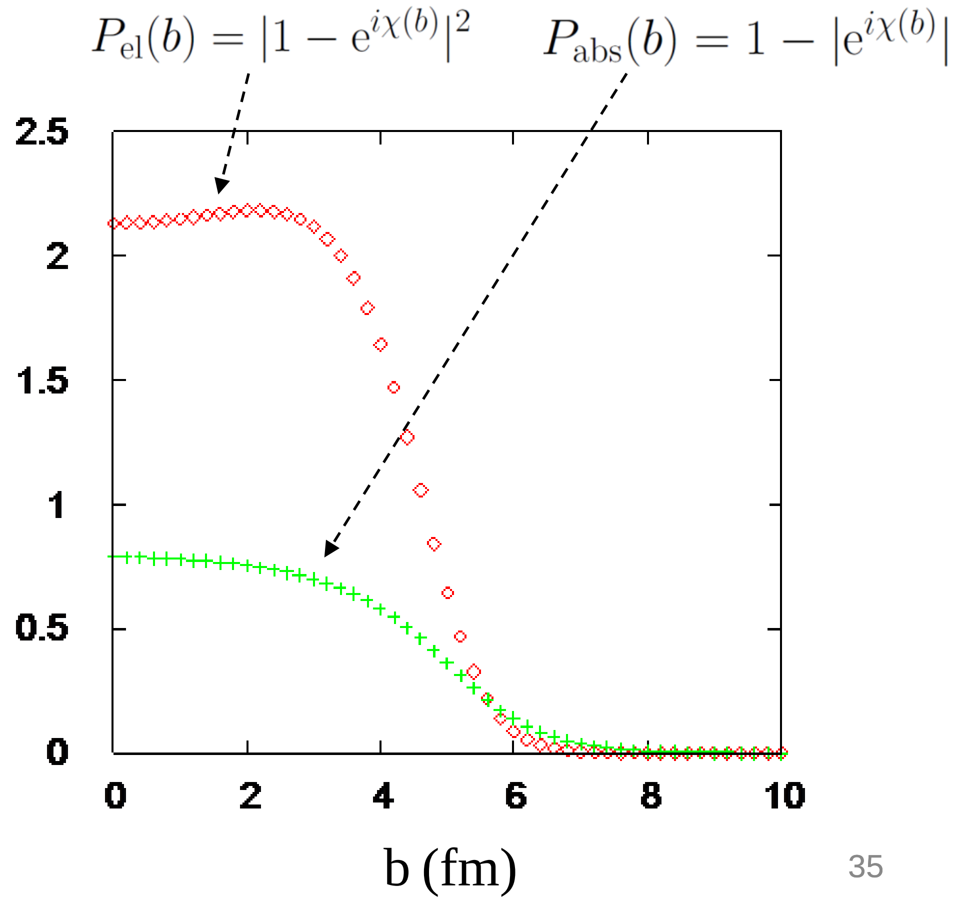
$V_0=-40\,\mathrm{MeV},\ W_0=-10\,\mathrm{MeV}$

$R=5\,\mathrm{fm},\ a=0.65\,\mathrm{fm}$

位相差関数に関係した諸量のｂ依存性



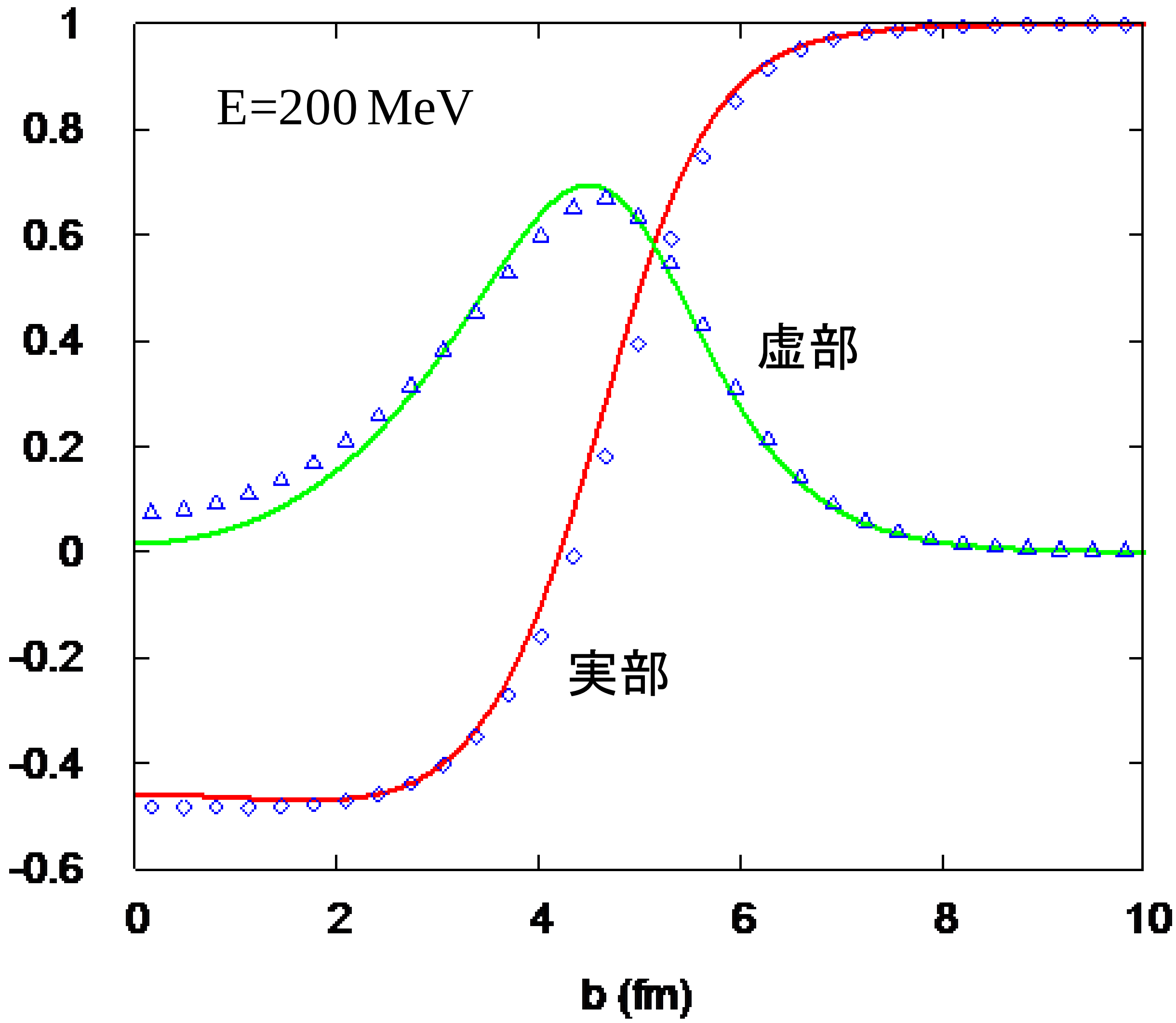




Partial-wave expansion vs eikonal approximation

$$e^{2i\delta_l} \quad l \to b = (l + \tfrac{1}{2})/k \qquad\qquad e^{i\chi(b)}$$

S行列の比較



部分波展開表示での断面積（cf. アイコナール表示)
11, 28, 29頁参照

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)|1-\mathrm{e}^{2i\delta_l}|^2 \to 4\pi|a|^2$$

$$\sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|\mathrm{e}^{2i\delta_l}|^2) \to \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(-a)$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)2\mathrm{Re}(1-\mathrm{e}^{2i\delta_l}) \to \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(-a) + 4\pi|a|^2$$

特に極低エネルギーではS波のみ寄与
有効距離理論　(散乱長 a　有効距離 r_0)

$$k\cot\delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0 k^2 + \ldots \qquad \mathrm{e}^{2i\delta_0} \to \frac{1-iak}{1+iak}$$

諸断面積は散乱長で表される

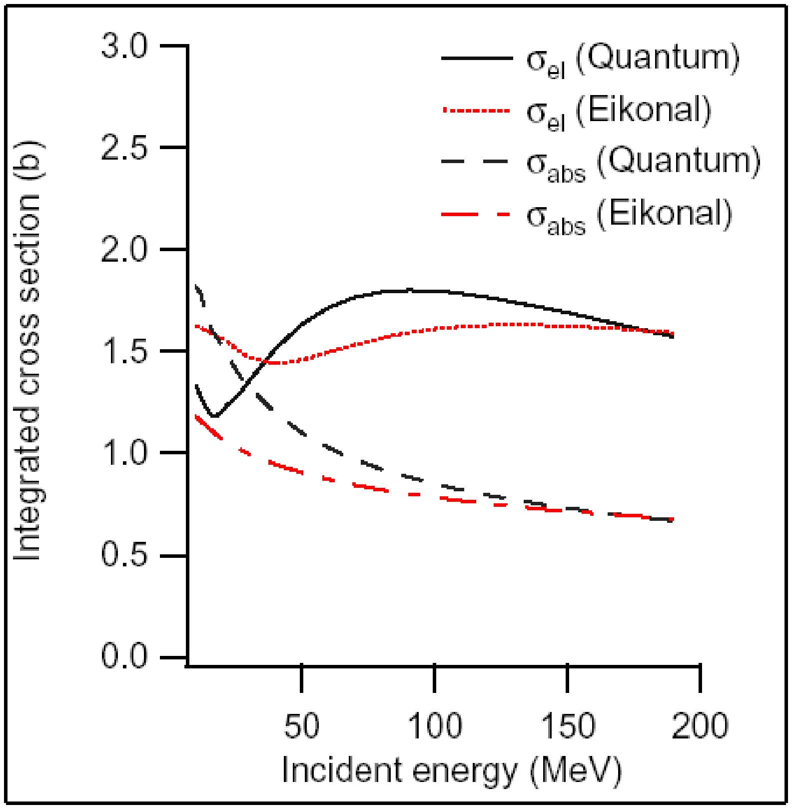
現在採用しているWoods-Saxonポテンシャルについて
散乱長 a=5.45-2.47i (fm)

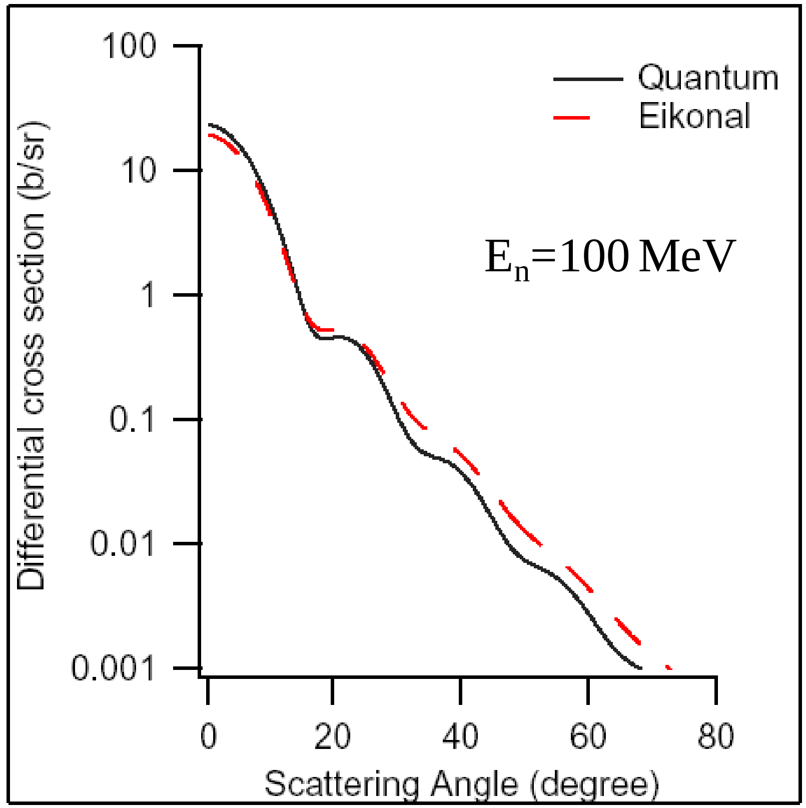
中性子散乱

$$V(r) = (V_0 + iW_0)/(1+e^{(r-R)/a})$$

$V_0 = -40\,\mathrm{MeV},\ W_0 = -10\,\mathrm{MeV}$

$R = 5\,\mathrm{fm},\ a = 0.65\,\mathrm{fm}$





Quantumは部分波展開による計算　　$1\mathrm{b} = 100\ \mathrm{fm}^2$

1. Introduction
2. Basics of potential scattering theory

3. Eikonal approximation

3.1 高エネルギー近似、衝突係数表示、位相差関数

3.2 諸断面積、光学定理、位相差関数の例

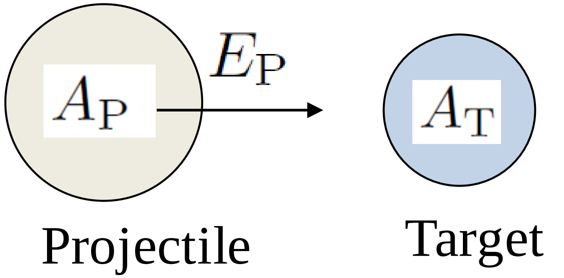
4. Glauber approximation for nuclear collision
5. Nucleon-nucleon profile function and calculation of phase shift function
6. Case of halo nuclei
7. Reaction cross sections
8. Elastic scattering and dynamic polarization potential
9. Breakup processes with Coulomb interaction

4. Glauber approximation for nuclear collision

4.1 Key words: エネルギースケール、アイコナール近似、断熱近似、時間依存方程式

相対運動のエネルギー

$$E_{\rm rel} = \frac{A_{\rm T}}{A_{\rm P}+A_{\rm T}} E_{\rm P} = \frac{\hbar^2 K^2}{2M_{\rm PT}}$$



運動学

換算質量 $M_{\rm PT} = m_{\rm N} A_{\rm P} A_{\rm T}/(A_{\rm P}+A_{\rm T})$

$$m_{\rm N} \simeq 931.5\,{\rm MeV}/c^2$$

相対運動の波数 $$K = \frac{M_{\rm PT} v_{\rm P}}{\hbar} = 4.72 \frac{A_{\rm P} A_{\rm T}}{A_{\rm P}+A_{\rm T}} \frac{v_{\rm P}}{c} \quad [{\rm fm}^{-1}]$$

入射核の全エネルギー $\epsilon_{\mathrm{P}} = E_{\mathrm{P}} + A_{\mathrm{P}} m_{\mathrm{N}} c^2 = \dfrac{A_{\mathrm{P}} m_{\mathrm{N}} c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\mathrm{P}}}{c}\right)^2}}$

これから 入射速度 v_{P} を求められる

$$\frac{v_{\mathrm{P}}}{c} = \left[1 - \left(\frac{m_{\mathrm{N}} c^2}{\frac{E_{\mathrm{P}}}{A_{\mathrm{P}}} + m_{\mathrm{N}} c^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

0.43 $E_{\mathrm{P}}/A_{\mathrm{P}}$ =100 MeV

0.86 $E_{\mathrm{P}}/A_{\mathrm{P}}$ =900 MeV

原子核同士の相互作用距離 R

$$R = r_0 (A_{\mathrm{P}}^{1/3} + A_{\mathrm{P}}^{1/3})$$

$$KR \approx 6.3 \frac{A_{\mathrm{P}} A_{\mathrm{T}}}{A_{\mathrm{P}} + A_{\mathrm{T}}} (A_{\mathrm{P}}^{1/3} + A_{\mathrm{T}}^{1/3}) \frac{v_{\mathrm{P}}}{c}$$

$KR \gg 1$ のアイコナール条件は殆ど満たされる

原子核衝突におけるエネルギースケール

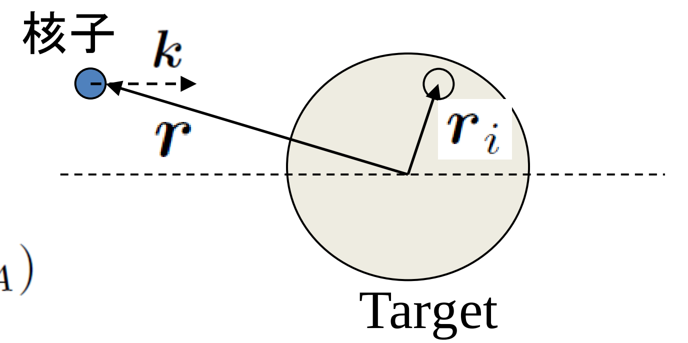
1. 相対運動のエネルギー
2. 核内核子の運動：フェルミエネルギー　$E_F \approx 40\mathrm{MeV} \quad (p_F \approx 260\mathrm{MeV}/c)$
3. 核子-核子衝突でのハドロン(π等)生成　$E_\mathrm{P}/A_\mathrm{P} \geq 300\mathrm{MeV}$

$E_\mathrm{P}/A_\mathrm{P} \leq 100\mathrm{MeV}$ では、核子交換や核子移行などを無視できない
ハドロン生成の起こるエネルギーでは、核子-核子相互作用に吸収項を
もたせて、フラックスの減少として表現
アイコナール近似は、大雑把に言って$E_\mathrm{P}/A_\mathrm{P} \geq 100\mathrm{MeV}$ で安全に適用可能

核子-原子核衝突の定式化
　核子-核子相互作用の情報をinputして、断面積（inclusive）を求める

標的のハミルトニアン

$$H_\mathrm{T}\Phi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_A) = E_\alpha\Phi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$$



全系のシュレーディンガー方程式

$$H\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_A) = E\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$$

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + H_\mathrm{T} + \sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

原子核反応論（河合光路、吉田思郎：朝倉物理学体系）
原子核の理論（市村宗武、坂田文彦、松柳研一：岩波講座現代の物理学）III 原子核反応

境界条件

$$\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_A) \xrightarrow{r \to \infty} \mathrm{e}^{ikz}\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A) + \sum_\alpha f_\alpha(\theta, \phi)\frac{\mathrm{e}^{ik_\alpha r}}{r}\Phi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_0 = \frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2m} + E_\alpha$$

終状態αへの微分断面積 $\displaystyle \frac{d\sigma_\alpha}{d\Omega} = \frac{v_\alpha}{v}|f_\alpha|^2$

注意: 反対称化無視
核子座標のみで記述しており、ハドロン生成は顕には扱えない
漸近系から明白なように、粒子移行過程は無視
標的のフラグメンテーションは、連続的励起状態と考えればよい

ポテンシャル散乱と同様、グリーン関数、Lippmann-Schwinger方程式、
散乱振幅の積分表示、アイコナール近似の順に展開する

$$(E - H_0)\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A) = \sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$$

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + H_{\mathrm{T}}$$ （相互作用の無い場合のハミルトニアン）

グリーン関数 $\quad (E-H_0)G^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathbf{1}$

グリーン関数に含まれる相対座標以外の原子核の核子座標は省いた
右辺の1は原子核の波動関数に対して単位演算子であることを表す

$$G^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\sum_\alpha G_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|$$

$$G_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{ik_\alpha|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\qquad E=E_\alpha+\frac{\hbar^2k_\alpha^2}{2m}$$

但し $E<E_\alpha$ の時（closed channel α） $k_\alpha\to i\kappa_\alpha\quad(\kappa_\alpha>0)$

（証明）
$$\begin{aligned}(E-H_0)G^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')&=(E-H_0)\sum_\alpha G_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|\\&=\sum_\alpha\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-E_\alpha\right)G_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|\\&=\sum_\alpha\left(\frac{\hbar^2k_\alpha^2}{2m}-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)G_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|\\&=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\sum_\alpha|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathbf{1}\end{aligned}$$

$\sum_\alpha|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|=\mathbf{1}$ （closureの関係）

境界条件を含んだシュレーディンガー方程式 (Lippmann-Schwinger方程式)

$$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)=\mathrm{e}^{ikz}\Phi_0(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)$$
$$+\int d\boldsymbol{r}'\,G^{(+)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\sum_{i=1}^{A}V(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_i)\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)$$

$r\to\infty$ として、グリーン関数の漸近系から(open channelのみ効く)
散乱振幅の表示を得る

$$f_\alpha(\theta,\phi)=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}'\int d\boldsymbol{r}_1\ldots\int d\boldsymbol{r}_A\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}'_\alpha\cdot\boldsymbol{r}'}\Phi^*_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)$$
$$\times\sum_{i=1}^{A}V(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_i)\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)\qquad(\ \boldsymbol{k}'_\alpha=k_\alpha\hat{\boldsymbol{r}}\ )$$

ポテンシャルの作用する領域で高精度の波動関数を求めればよい

$$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)=\mathrm{e}^{ikz}\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)$$

$$\left[vp_z+\cancel{\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}}+(\cancel{H_{\mathrm{T}}-E_0})+\sum_{i=1}^{A}V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\right]\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)=0$$

アイコナール近似　断熱近似(励起エネルギー $\sim\dfrac{\boldsymbol{q}^2}{2m}$ << 入射エネルギー)

（但し、クーロン分解反応では断熱近似は破綻. 9章参照）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A) = \dfrac{1}{i\hbar v}\displaystyle\sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A) \\ \text{初期条件} \quad \hat{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A) = \Phi_0(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A) \quad (z \longrightarrow -\infty) \end{cases}$$

この解は以下のようになる

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz' \sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{b}+z'\hat{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{r}_i)\right]\Phi_0(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_A)$$

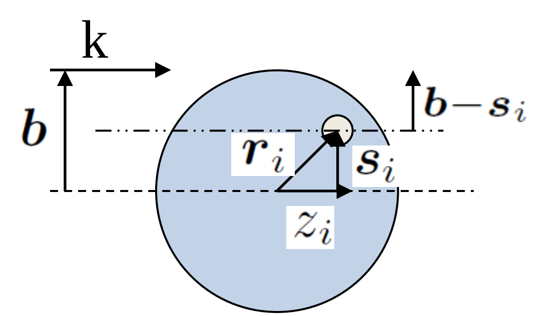
ポテンシャル散乱の場合と同様の計算から、標的核の状態αへの散乱振幅を得る

$$f_\alpha(\theta,\phi) = \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \langle\Phi_\alpha|1-\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)}|\Phi_0\rangle \qquad \boldsymbol{r}_i = (\boldsymbol{s}_i, z_i)$$

$$\chi(\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, V(\boldsymbol{b}+z\hat{\boldsymbol{z}})$$ （核子-核子散乱の位相差関数）

$\langle\Phi_\alpha|\ldots|\Phi_0\rangle$ は標的核の座標に関する積分

グラウバー理論は、摂動展開を使用せず、
多重散乱効果をすべてのオーダーまで含む
微視的多体反応論



座標の関係

断熱近似を用いない場合：外場のある時間依存方程式に書き換えられる

$$\left[v p_z + \cancel{\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}} + (H_{\mathrm{T}} - E_0) + \sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \right] \hat{\Psi}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A) = 0$$

$z = vt$ と置く　$\hat{\Psi}(t, \boldsymbol{b}) = \hat{\Psi}(\boldsymbol{b} + vt\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$ と略記すると

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(t, \boldsymbol{b}) = \left[(H_{\mathrm{T}} - E_0) + \sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{b} + vt\hat{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{r}_i) \right] \hat{\Psi}(t, \boldsymbol{b})}$$

初期条件 $\hat{\Psi}(-\infty, \boldsymbol{b}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$ のもとに方程式を解き

$\hat{\Psi}(\infty, \boldsymbol{b})$ を計算　これを標的核の状態で展開して諸断面積を求める

$$\hat{\Psi}(\infty, \boldsymbol{b}) = \sum_{\alpha} C_\alpha(\boldsymbol{b}) \Phi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A)$$

参考文献

Esbensen et al. NPA581, 107 (1995); NPA600, 37 (1996)
Kido et al. PRC53, 2296 (1996)
Goldstein et al. PRC73, 024602 (2006)

4.2 Key words: 全反応断面積、ハドロン生成、相互作用断面積

個々の励起状態への断面積ではなく、inclusiveな断面積を求める
Closureの関係式を利用する

$$\sigma_\alpha = \int d\Omega \frac{v_\alpha}{v} |f_\alpha(\theta,\phi)|^2$$

$$\simeq \int \frac{d\boldsymbol{q}}{k^2} \left| \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{b}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} \langle \Phi_\alpha | 1 - \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} | \Phi_0 \rangle \right|^2$$

$$= \int d\boldsymbol{b} \left| \langle \Phi_\alpha | 1 - \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} | \Phi_0 \rangle \right|^2 .$$

$$d\Omega = d\boldsymbol{q}/k^2$$
$$v_\alpha \simeq v$$

衝突係数 $\boldsymbol{b}$ の衝突で、状態αが励起される確率

$$P_\alpha(\boldsymbol{b}) = \left| \langle \Phi_\alpha | 1 - \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} | \Phi_0 \rangle \right|^2$$

弾性散乱断面積 $\sigma_{\mathrm{el}} = \int d\boldsymbol{b} \left| 1 - \langle \Phi_0 | \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} | \Phi_0 \rangle \right|^2$

“全断面積” $\sum_\alpha \sigma_\alpha = \int d\boldsymbol{b}\, \langle \Phi_0 | \left| 1 - \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} \right|^2 | \Phi_0 \rangle$

Closureの関係式　基底状態の波動関数のみで表現される

これは全断面積$\sigma_{\rm tot}$ か？　全反応断面積 $\sigma_{\rm reac}$ はどう与えられるか？

ハドロン生成を伴う高エネルギー反応では、$\chi(\boldsymbol{b})$は複素数として扱う

$$\Xi \equiv \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} \qquad |\Xi|^2 = \mathrm{e}^{-2\sum_{i=1}^{A}\mathrm{Im}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} \neq 1$$

全断面積 $$\sigma_{\rm tot} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}f_{\alpha=0}(0)$$ （光学定理）

$$f_{\alpha=0}(0) = \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{b}\,\langle\Phi_0|1-\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)}|\Phi_0\rangle$$

$$\mathrm{Im}f_{\alpha=0}(0) = \frac{k}{2\pi}\int d\boldsymbol{b}\left(1-\mathrm{Re}\langle\Phi_0|\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)}|\Phi_0\rangle\right)$$

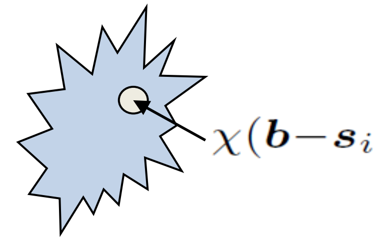
全反応断面積
$$\sigma_{\rm reac} = \sigma_{\rm tot} - \sigma_{\rm el}$$
$$= \int d\boldsymbol{b}\left(1-|\langle\Phi_0|\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)}|\Phi_0\rangle|^2\right)$$

ハドロン生成なし $$\sum_{\alpha\neq 0}P_\alpha(\boldsymbol{b}) = P_{\rm reac}^{\rm 0HP}(\boldsymbol{b})$$

ハドロン生成あり $$P_{\rm reac}^{\rm HP}(\boldsymbol{b}) = P_{\rm reac}(\boldsymbol{b}) - P_{\rm reac}^{\rm 0HP}(\boldsymbol{b})$$

諸断面積の直感的意味

アイコナール＋断熱近似で核子-原子核の相対運動はすでに解いた
衝突後の標的核の波動関数は、核内核子がそれぞれ位相差をうけ、
それらの総和の位相（$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}_i$ に依存する）だけ変化する



衝突後の標的核の波動関数

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A) = \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)}\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_A) \quad (z \to \infty)$$

初期状態の波動関数との差が衝突による変更部分を表す

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathrm{scat}} &= \hat{\Psi} - \Phi_0 = \left[\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} - 1\right]\Phi_0 \\
&= \sum_{\alpha}\Phi_\alpha\langle\Phi_\alpha|\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} - 1|\Phi_0\rangle \\
&= \Phi_0\underline{\langle\Phi_0|\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)} - 1|\Phi_0\rangle} + \sum_{\alpha\neq 0}\Phi_\alpha\underline{\langle\Phi_\alpha|\mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{A}\chi(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i)}|\Phi_0\rangle}
\end{aligned}$$

係数のノルムの2乗が状態αを励起する確率を与える

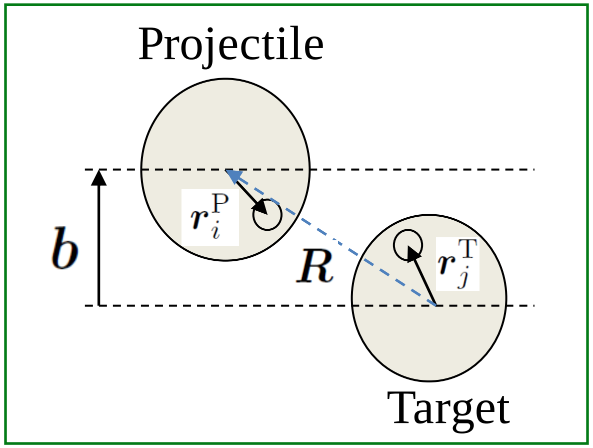
ハドロン生成がある場合は $\langle\hat{\Psi}|\hat{\Psi}\rangle < 1$

原子核-原子核衝突の定式化は、核子-原子核の場合と同様

原子核間の相対座標$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{b}, Z)$

ハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M_{\mathrm{PT}}} + H_{\mathrm{P}} + H_{\mathrm{T}} + \sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}} V(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}})$$



境界条件

$$\begin{aligned}&\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{P}}}^{\mathrm{P}}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}) \\ &= \mathrm{e}^{iKZ}\Phi_0^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{P}}}^{\mathrm{P}})\Phi_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}) \\ &+ \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}(\theta, \phi)\frac{\mathrm{e}^{iK_{\alpha\beta}R}}{R}\Phi_\alpha^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{P}}}^{\mathrm{P}})\Phi_\beta^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

$$\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{P}}}^{\mathrm{P}}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{e}^{iKZ}\hat{\Psi}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{P}}}^{\mathrm{P}}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}})$$

$$\left[vP_z + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M_{\mathrm{PT}}} + (H_{\mathrm{P}} - E_0^{\mathrm{P}}) + (H_{\mathrm{T}} - E_0^{\mathrm{T}}) + \sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}} V(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}})\right]$$

$$\times\hat{\Psi}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{P}}}^{\mathrm{P}}, \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{r}_{A_{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}) = 0$$

運動エネルギー項と励起エネルギー項を無視する

散乱振幅

$$f_{\alpha\beta}(\theta,\phi)=\frac{iK}{2\pi}\int d\boldsymbol{b}\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\langle\Phi_\alpha^{\mathrm{P}}\Phi_\beta^{\mathrm{T}}|1-\mathrm{e}^{i\sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}})}|\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}\rangle$$

入射核状態α、標的核βへ遷移する断面積 $\sigma_{\alpha\beta}=\int d\boldsymbol{b}\,P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{b})$

$$\boxed{P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{b})=\left|\langle\Phi_\alpha^{\mathrm{P}}\Phi_\beta^{\mathrm{T}}|1-\mathrm{e}^{i\sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}})}|\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}\rangle\right|^2}$$

核子-核子位相差関数は加算的
入射核と標的核の座標に関する多重積分

全反応断面積（一般に、光学定理を利用して得られる）

$$P_{\mathrm{reac}}(\boldsymbol{b})\ =1-\left|\langle\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}|\mathrm{e}^{i\sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}})}|\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}\rangle\right|^2$$

$$\sigma_{\mathrm{el}}=\int d\boldsymbol{b}\left|1-\langle\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}|\mathrm{e}^{i\sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}})}|\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}\rangle\right|^2$$

$$\sigma_{\mathrm{reac}}=\int d\boldsymbol{b}\left(1-\left|\langle\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}|\mathrm{e}^{i\sum_{i\in\mathrm{P}}\sum_{j\in\mathrm{T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}})}|\Phi_0^{\mathrm{P}}\Phi_0^{\mathrm{T}}\rangle\right|^2\right)$$

核子-原子核反応の断面積の計算

諸断面積の表現. $\sigma_{\mathrm{x}} = \int d\boldsymbol{b} P_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{b})$

x	$P_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{b})$
tot	$2 - 2\langle \mathrm{Re}\Xi \rangle$
el	$\lvert 1 - \langle \Xi \rangle \rvert^2$
reac	$1 - \lvert \langle \Xi \rangle \rvert^2$
reac (0HP)	$\langle \lvert \Xi \rvert^2 \rangle - \lvert \langle \Xi \rangle \rvert^2$
reac (HP)	$1 - \langle \lvert \Xi \rvert^2 \rangle$

$$\Xi \equiv \mathrm{e}^{i \sum_{i=1}^{A} \chi(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{s}_i)}$$

$$\langle \cdots \rangle = \langle \Phi_0 | \cdots | \Phi_0 \rangle$$

基底状態の波動関数のみ必要

原子核-原子核反応の場合には以下の読み替えを行う

$$\Xi \longrightarrow \mathrm{e}^{i \sum_{i \in \mathrm{P}} \sum_{j \in \mathrm{T}} \chi(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{P}} - \boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}})}$$

$$\langle \cdots \rangle \longrightarrow \langle \Phi_0^{\mathrm{P}} \Phi_0^{\mathrm{T}} | \cdots | \Phi_0^{\mathrm{P}} \Phi_0^{\mathrm{T}} \rangle$$

相互作用断面積

高エネルギー反応では、

多くの終状態を区別するのは不可能、衝突後入射核の核子数は増えない

核子数が減った終状態への断面積の総和として相互作用断面積を定義

$$\sigma_{\rm reac} = \sum_{\alpha\neq 0}\sum_{\beta}\sigma_{\alpha\beta} \qquad \sigma_{\rm int} = \sum_{\alpha\notin {\rm bound}}\sum_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{\rm reac} - \sigma_{\rm int} = \sum_{\alpha\in {\rm bound}\neq 0}\sum_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\alpha\in {\rm bound}\neq 0}\sum_{\beta}\int d\boldsymbol{b}\left|\langle\Phi^{\rm P}_{\alpha}\Phi^{\rm T}_{\beta}|{\rm e}^{i\sum_{i\in{\rm P}}\sum_{j\in{\rm T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}^{\rm P}_i-\boldsymbol{s}^{\rm T}_j)}|\Phi^{\rm P}_0\Phi^{\rm T}_0\rangle\right|^2$$

標的核の状態βは観測しないのでclosureを使う

$$= \sum_{\alpha\in {\rm bound}\neq 0}\int d\boldsymbol{b}\,\langle\Phi^{\rm T}_0||\langle\Phi^{\rm P}_{\alpha}|{\rm e}^{i\sum_{i\in{\rm P}}\sum_{j\in{\rm T}}\chi(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}^{\rm P}_i-\boldsymbol{s}^{\rm T}_j)}|\Phi^{\rm P}_0\rangle|^2|\Phi^{\rm T}_0\rangle$$

全反応断面積と相互作用断面積

実験的には相互作用断面積の測定のほうが容易

理論的には全反応断面積の計算のほうが容易

上の表式の評価ができればよい

$\sigma_{\rm int} \simeq \sigma_{\rm reac}$ として測定された相互作用断面積を
全反応断面積で評価することが通常行われる

この妥当性の検証は
　　原子核の励起構造
　　入射エネルギー
などの違いに応じて幾つかの場合になされるのが望ましいが、
どこまでいっているのか

粒子崩壊の閾値以下に励起状態をもたない場合には
相互作用断面積と全反応断面積は等しい。ハロー核は
この場合に相当する

安定核の場合の両断面積の違いについて
くろたま模型による現象論的議論
　　A. Kohama, K. Iida, K. Oyamatsu, PRC78 (2008)

1. Introduction
2. Basics of potential scattering theory
3. Eikonal approximation

4. Glauber approximation for nuclear collision

4.1 エネルギースケール、アイコナール近似、断熱近似、時間依存方程式

4.2 全反応断面積、ハドロン生成、相互作用用断面積

5. Nucleon-nucleon profile function and calculation of phase shift function
6. Case of halo nuclei
7. Reaction cross sections
8. Elastic scattering and dynamic polarization potential
9. Breakup processes with Coulomb interaction