

対称性の自発的破れと量子的破れ

Version 平成 31 年 10 月 19 日

理化学研究所 仁科加速器科学研究センター，理研 iTHEMS 日高 義将¹

対称性は現代物理において欠かせない概念である．通常の対称性は点状の物体に作用するものだが，この概念は，渦糸や分隔壁のような広がりを持った物体の対称性 (高次対称性) に拡張され，通常の対称性と同じように自発的破れや量子的破れ (アノマリー) を考えることができる．本稿では，通常の対称性と高次対称性の基礎事項について解説し，応用として対称性の自発的破れと量子的破れについて議論する．連続対称性が自発的に破れると南部-Goldstone モードと呼ばれるギャップレスモードが現れる．南部-Goldstone モードには，超流動中の音波に代表される線形分散を持った Type-A モードと強磁性体に代表される 2 乗分散を持った Type-B モードが存在する．通常の対称性について，これらのモードと対称性の破れの関係についての一般論を解説する．また，高次対称性の自発的破れの例として真空中の光子が南部-Goldstone モード (Type-A) として理解され，特殊な状況では，2 乗分散を持つ Type-B のモードになることを見る．量子的破れの応用としては，異常輸送現象と対称性によって保護されたトポロジカル相を議論する．対称性によって保護されたトポロジカル相は，境界を持つ場合に境界理論の対称性の量子的破れ (アノマリー) を用いて理解できることを見る．最後に，離散的な高次対称性の破れとトポロジカル秩序の関係について議論する．分数量子ホール系のような可換エニオンが現れる典型的なトポロジカル秩序を持った状態は，通常の対称性の破れた状態としては理解できないが，高次対称性が Type-B 的に破れた状態として理解できる．エニオン統計や空間の多様体に依存した基底状態の縮退も高次対称性を用いると自然に理解できる．

1 表記

d を空間次元とする．時間と空間をまとめて， $(d + 1)$ 次元時空という表記を用いる．本稿では， $c = \hbar = 1$ の自然単位系を用いる．ここで c は光速， \hbar は Planck 定数を 2π で割った Dirac 定数である．相対論系，非相対論系にかかわらず $(d + 1)$ 元ベクトル $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d) = (t, \boldsymbol{x})$ の表記を用いる．場の座標は，時間空間をまとめて $\psi(x)$ のように表記する．時間空間を分けて強調したい場合は， $\psi(t, \boldsymbol{x})$ を用いる．特に混乱を引き起こさない場合には引数を省略することもある．微分の記号は， $(d + 1)$ 次元の偏微分を $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = (\partial_0, \nabla)$ と書く．また，ゲージ場に結合定数を吸収させる表記を用いる．つまり， $\partial_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ と書くところを， $\partial_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ と表すことにす

¹E-mail: hidaka@riken.jp

る．完全版対称テンソル $\epsilon_{\mu_0\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}$ の符号は $\epsilon_{0123\cdots d} = 1$ を用いる． $(d+1)$ 次元ベクトルの内積は， $x \cdot p = x \cdot p - x^0 p^0$ と定義する．上下に同じ添字が出てきた場合は，和を取る Einstein の縮約記法を用いる．

2 対称性の基礎: 通常対称性と高次対称性

量子論における対称性変換の演算子は，ハミルトニアンと可換なユニタリー演算子である．ここでは，内部対称性 (internal symmetry or on-site symmetry) の対称性変換を時空上の幾何学の言葉に焼き直す．そうすることで，有限群のアノマリーを幾何学的に表現でき，バルクエッジ対応を幾何学的に解釈することができる．また，広がりを持った物体の対称性 (higher-form symmetry) へ容易に拡張できるようになる [1]．5.3 節で見るように広がりを持った物体の対称性はトポロジカル秩序を持った相の理解にも役に立つ．

2.1 通常対称性 (0-form symmetry)

通常内部対称性は，局所的な場に作用する対称性である．ある時空点上の場は 0 次元物体であるので局所的な場に作用する対称性を 0 次対称性 (0-form symmetry) と呼ぶ．まず，簡単な例として $U(1)$ 対称性を持つ $(d+1)$ 次元，相互作用のないフェルミオンの理論を考えてみよう．ハミルトニアンとして以下を考える：

$$H = \int d^d x \frac{-1}{2m} \psi^\dagger(x) \nabla^2 \psi(x). \quad (1)$$

ここで m は質量で， ψ は同時刻反交換関係 $\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{x}')\} = \psi(t, \mathbf{x})\psi^\dagger(t, \mathbf{x}') + \psi^\dagger(t, \mathbf{x}')\psi(t, \mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ を満たす場である．ハミルトニアンは $U(1)$ 変換 $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow e^{-i\theta}\psi^\dagger$ (θ は定数) の元で不変である．対応する $U(1)$ 対称性のカレント $j^\mu = (j^0, \mathbf{j})$ は，

$$j^0 = \psi^\dagger \psi, \quad \mathbf{j} = \frac{i}{2m} ((\nabla \psi^\dagger) \psi - \psi^\dagger \nabla \psi) \quad (2)$$

で，保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たす．電荷は，カレントのゼロ成分を空間積分した $Q(t) = \int d^d x j^0(x)$ と定義される．形式的には， $Q(t)$ は時間の関数である．しかし，もし無限遠でカレントがゼロになる場合 (通常これが仮定されている) や，境界を持たない閉じた空間上では， $Q(t)$ は時間によらない．なぜならば，

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \int d^d x \partial_0 j^0(x) = - \int d^d x \partial_i j^i(x) = 0 \quad (3)$$

となるからである．ここで表面項を落とした．また， iQ は $U(1)$ 無限小変換の生成子になっており，場は， $[iQ, \psi] = -i\psi$ と変換する．有限変換に対しては， $g = e^{i\theta}$ として，ユニタリー演算子を $U_g = e^{i\theta Q}$ と定義すると，この演算子の元で ψ は，

$$U_g \psi U_g^{-1} = R_g \psi \quad (4)$$

と変換する．ここで， $U_g^{-1} = U_{g^{-1}} = U_g^\dagger$ である．また， $R_g = e^{-i\theta}$ は $U(1)$ のユニタリー表現である．この演算子 U_g を本稿では対称性演算子と呼ぶ．また，対称性の元で変換する場を荷電演算子と呼ぶことにする．対称性演算子は以下の群の規則を満たす²：

$$U_g U_{g'} = U_{gg'} \quad (\text{積}), \quad (5)$$

$$U_g (U_{g'} U_{g''}) = (U_g U_{g'}) U_{g''} \quad (\text{結合則}), \quad (6)$$

$$U_e U_g = U_g U_e = U_g \quad (\text{単位元の存在}), \quad (7)$$

$$U_{g^{-1}} U_g = U_g U_{g^{-1}} = U_e \quad (\text{逆元の存在}). \quad (8)$$

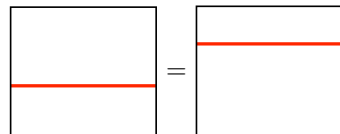
ここで， e は単位元， g^{-1} は g の逆元である．ここでは， $U(1)$ 対称性を考えたが，一般の群 G についても上記の規則が成り立つ．

さてここで少し見方を変えてみよう．形式的には， Q は， $j^0(x)$ を空間積分したものである．時刻 t が一定の d 次元空間に広がった演算子とみなすことができる．この点を強調するために対称性演算子は $U_g(\mathcal{M}^d)$ のように表すのが良い． \mathcal{M}^d は， $(d+1)$ 次元時空中のある時間一定面である． $d=1$ の場合を図で表すと，



$$(9)$$

のようになる．ここで縦方向を時間，横方向を空間とした．この演算子が時間によらないという事実は，時空上でこの演算子の位置を変化させても期待値は変化しないことを意味する．つまり，



$$(10)$$

が成り立つ．この関係は $(d+1)$ 時空中の d 次元超曲面に定義された演算子に拡張することができる．これを見るには，微分形式を用いると見やすい(微分形式については Appendix A 節を参照)．カレントを

$$j = \frac{1}{d!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} j^\mu dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_d}, \quad (11)$$

と定義すると保存則は，単に $dj = 0$ の形に書け，電荷は $Q = \int_{\mathcal{M}^d} j$ と表される． \mathcal{M}^d を時間一定面にとると $Q = \int d^d x j^0$ に帰着する．さてここで \mathcal{M}^d の微小変化を考えるよう： $\mathcal{M}^d \rightarrow \mathcal{M}^d + \delta\mathcal{M}^d$ ．ここで， $\delta\mathcal{M}^d$ は $(d+1)$ 次元のある多様体 \mathcal{V}^{d+1} の境界を用いて表すことができる： $\delta\mathcal{M}^d = \partial\mathcal{V}^{d+1}$ ．この変形で電荷は不変であることがわかる：

$$\delta Q := \int_{\mathcal{M}^d + \delta\mathcal{M}^d} j - \int_{\mathcal{M}^d} j = \int_{\partial\mathcal{V}^{d+1}} j = \int_{\mathcal{V}^{d+1}} dj = 0. \quad (12)$$

²一般には，(5) 式の右辺は $U_{gg'}$ ではなく $e^{i\theta(g,g')} U_{gg'}$ のように位相を持って良い．この場合の表現は射影表現と呼ばれる．

ここで、ストークスの定理及び、保存則 $dj = 0$ を用いた。この事実は、 $U_g(\mathcal{M}^d)$ は時間方向に移動させるだけでなく任意のなめらかな変形に対して物理量の期待値を変えない事を意味している。この意味で対称性演算子はトポロジカルである。図で表すと、

$$\square \text{ (with horizontal red line) } = \square \text{ (with wavy red line) } \quad (13)$$

となる。荷電演算子があるときはトポロジカルな変形は注意しなければならない。量子論において、荷電演算子が U_g の元でどの様に変化するかは、我々は (4) 式によって既に知っており、図で表現すると

$$\square \text{ (with two red lines and arrows) } = \square \text{ (with red circle and dot) } = \square \text{ (with red dot) } \quad (14)$$

となる。ここでは、 U_g と U_g^{-1} の違いを面の矢印で表現している。 U がトポロジカルである性質を用いて変形し真ん中の図を得る。従って図的な解釈では、 \mathcal{M}^d 上で定義された対称性演算子が、荷電演算子 $\psi(x)$ を囲むと対称性変換が施されるという規則が成り立つ。これを

$$U_g(\mathcal{M}^d)\psi(x) = R_g\psi(x) \quad (15)$$

と表現する³。ここでは、連続群である $U(1)$ 対称性を考えたが、有限群の対称性演算子 $U_g(\mathcal{M}^d)$ に関してもトポロジカルであるという性質が成り立つ。

2.2 高次対称性 (Higher form symmetry)

前節の対称性の幾何学的な見方によって対称性を広がりを持った物体へ作用する対称性へと拡張することができる [1]。前節の U は、 d 次元の広がりを持ったトポロジカルな演算子であった。同様に p を非負の整数として $(d-p)$ 次元に広がったトポロジカルな演算子を考えることができる。この演算子で囲める物体はどのようなものだろうか？例として $d=2, p=1$ の場合を考えてみよう。 $d-p=1$ で U は閉じた線 (ループ) 状の演算子である。(2+1) 次元中では、ループ状の物体は 0 次元的な物体をすり抜けてしまっただけで囲むことはできない。しかし 1 次元的の広がりを持ったループ状の物体は、ループ状の物体で“囲む”ことができる:

$$\text{Two overlapping loops} \quad (16)$$

この状態は、“囲む”と言うより“絡む”(Link) と表現するほうが正しいだろう。一般的には $(d+1)$ 次元中で $(d-p)$ 次元の面で p 次元の物体を絡むことができる。(15) 式の対称性の変換のルールは、

³この表現は、演算子形式ではなく経路積分形式と解釈するのが良い。

p 次元に広がった荷電演算子を $V(C^p)$ して,

$$U_g(\mathcal{M}^{d-p})V(C^p) = R_g V(C^p) \quad (17)$$

と拡張される．ここで, C^p は p 次元的な閉じた超面を表す．また, 対称性演算子は, 群の規則を満たすものとする:

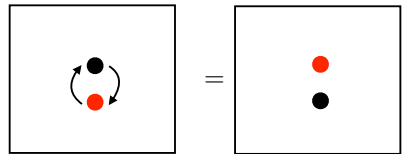
$$U_g(\mathcal{M}^{d-p})U_{g'}(\mathcal{M}^{d-p}) = U_{gg'}(\mathcal{M}^{d-p}), \quad (18)$$

$$U_g(\mathcal{M}^{d-p})(U_{g'}(\mathcal{M}^{d-p})U_{g''}(\mathcal{M}^{d-p})) = (U_g(\mathcal{M}^{d-p})U_{g'}(\mathcal{M}^{d-p}))U_{g''}(\mathcal{M}^{d-p}), \quad (19)$$

$$U_e(\mathcal{M}^{d-p})U_g(\mathcal{M}^{d-p}) = U_g(\mathcal{M}^{d-p})U_e(\mathcal{M}^{d-p}) = U_g(\mathcal{M}^{d-p}), \quad (20)$$

$$U_{g^{-1}}(\mathcal{M}^{d-p})U_g(\mathcal{M}^{d-p}) = U_g(\mathcal{M}^{d-p})U_{g^{-1}}(\mathcal{M}^{d-p}) = U_e(\mathcal{M}^{d-p}). \quad (21)$$

群としては可換群となる．なぜならば, 対称性演算子の位置を交差することなしに入れ替えられるためである．例えば, $(1+1)$ 次元の場合, 0 次対称性演算子, 1 次対称性演算子は, それぞれ線演算子と点演算子である． 1 次対称性演算子は, 互いに位置を $(1+1)$ 次元時空のなかで交差することなく入れ替えられる:



$$\quad (22)$$

一方, 0 次対称性演算子は, $(1+1)$ 次元時空の中で交差なしには入れ替えられないので非可換になりうる:



$$\quad (23)$$

例 1 $(3+1)$ 次元 $U(1)$ ゲージ理論 (物質場なし)

物質場のない $U(1)$ ゲージ理論は, 電氣的 $U(1)$ -1 次対称性と磁氣的 $U(1)$ -1 次対称性を持つ．これを見てみよう．ゲージ場を A_μ , 場の強さを $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ として, Maxwell 方程式は,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad (24)$$

と表される．微分形式を用いると $d * F = 0, dF = 0$ と書ける．ここで, $*F$ は F のホッジ双対である．Maxwell 方程式を保存則とみなすことで対称性演算子を

$$U_{e^{i\theta}}^E(\mathcal{M}^2) := \exp i\theta \int_{\mathcal{M}^2} j_M, \quad U_{e^{i\eta}}^M(\mathcal{M}^2) := \exp i\eta \int_{\mathcal{M}^2} j_E \quad (25)$$

と定義できる．ここで $j_E := *F/e^2, j_M := F/(2\pi)$ とした． e は電荷で, \mathcal{M}^2 は, 閉じた 2 次元面である．積分が 2 次元的なのでこれらは, 1 次対称性の対称性演算子である．物理的には磁束の保存, 電束の保存を表している．電荷を持った物質場がある場合は, 電束の湧き出しによって電束は保存し

なくなるため電氣的 1 次対称性は失われる．一方磁束は物質場が存在しても保存するので磁氣的対称性は存在する．荷電演算子は，Wilson ループと呼ばれる演算子

$$W(C^1) = \exp i \int_{C^1} A \quad (26)$$

である． C^1 は閉じた 1 次元線である．もし， M^2 と C^1 がリンクしていれば $U_{e^{i\theta}}^E(M^2)W(C^1) = e^{i\theta}W$ の変換を受ける．同様に，磁氣対称性の荷電演算子は't Hooft ループと呼ばれる．

例 2 (1 + 1) 次元量子イジング模型

高次対称性は低エネルギー極限において創発する場合がある．例として (1 + 1) 次元量子イジング模型を考えよう．ハミルトニアンは，

$$H = -J \sum_n \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \quad (27)$$

で与えられる．ここで， $J > 0$ は結合定数， σ^a は Pauli 行列で陽な形は，

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

で与えられる．この系は \mathbb{Z}_2 -0 次対称性を持つ．これは，スピンをひっくり返す変換で，対称性演算子は， $U^{[0]} = \prod_n \sigma_n^x$ である．荷電演算子は， σ_n^z で， $U^{[0]}\sigma_n^z U^{[0]\dagger} = -\sigma_n^z$ の変換を受ける．また，ハミルトニアンは σ^z のみで書かれているので， σ_n^z はハミルトニアンと可換である．従って $U_n^{[1]} = \sigma_n^z$ は対称性演算子となる． $U_n^{[1]}U_n^{[1]} = 1$ より \mathbb{Z}_2 対称性である．対応する荷電演算子は線的な $W = \prod_n \sigma_n^x$ である． $U_n^{[1]}$ はハミルトニアンと可換なので， $U_n^{[1]}$ を高次対称性の演算子とみなしたいが，時間と空間が同等に扱われる相対論的な理論と違い， $U_n^{[1]}$ は時間方向にトポロジカルに変形できるが，空間方向には自由に変形できないので，厳密には高次対称性の演算子とは言えない．例えば，もし σ_n^z が空間方向にもトポロジカルであれば，2 つの局所的な演算子 σ_n^x と σ_n^z は可換である必要がある．しかし， $\sigma_n^x \sigma_n^z \neq \sigma_n^z \sigma_n^x$ であるためトポロジカルことと矛盾する．しかし， $J \rightarrow \infty$ または，低エネルギー極限を考えた場合， z 方向にスピンの揃った状態となり σ_n^z を基底状態に作用させても状態を変えないので空間方向にもトポロジカルと見なせ 1 次対称性が創発したとみなすことができる．

3 対称性の自発的破れと南部-Goldstone モード

自然界におけるほとんどのギャップを持たないモード，または波は自発的対称性の破れに起因している．マクロな系で最も身近な例は，固体中の音波だろう．固体中の音波は，固体が結晶構造を持つことで並進対称性の自発的破れが起き，それにともなって現れる南部-Goldstone(NG) モードである．ミクロな系では，強磁性体中のマグノンや，超流動中の音波が NG モードである．相対論的な系では，NG モードは南部-Jona-Lasinio [2, 3] および，Goldstone [4] による模型の解析に現れた．その後，Goldstone-Salam-Weinberg によって一般化され定理となった [5]．相対論的な系では，真空が明白に Lorentz 対称性を保つ場合，NG モードは自発的対称性の破れと 1 対 1 対応があり，破れた対称性の数だけ振動数が波数に比例した線形分散の NG モードが現れる．一方，相対論的であるという

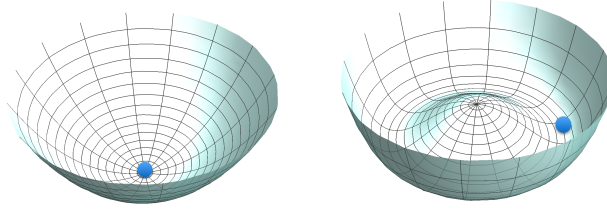


図 1: $O(2)$ 回転対称なポテンシャルの図．真空が回転対称性を保つ場合 (左) と自発的対称性の破れた場合 (右) ．

縛りを外した場合は、様々な可能性が生じる．例えば、強磁性体では、スピンの回転対称性がスピンの揃うことによって自発的に破れる．スピンの揃った回転軸に垂直な回転方向が 2 つあるので、破れた対称性の数は 2 つである．しかし、NG モードであるマグノンには 1 つで 2 乗分散を持っており、相対論的な系での定理では捉えきれない．非相対論系を含むような定理の一般化が必要である．本節では、南部-Goldstone の定理の一般化について解説する．一般に NG モードには Type-A と Type-B と呼ばれる 2 種類のモードが存在し、特に内部対称性の自発的破れではそれらは典型的に線形分散、2 乗分散を持つ．この節では、まず通常の対称性に対して Type-A と Type-B とは何か、それらと独立なモードの数、分散関係の間を議論し、高次対称性の自発的破れにともなう NG モードについても議論する．ここでは、カバーできない話題や相対論的な南部-Goldstone の定理の証明については、例えば、[6, 7] を参照されたい．

3.1 自発的対称性の破れと南部-Goldstone の定理

連続対称性が存在すると Noether の定理により対称性に対応した保存する電荷 Q が存在する (Noether の定理については Appendix B 節を参照)．連続対称性の自発的破れは素朴には基底状態 $|\Omega\rangle$ が対称性変換の元で状態を変えてしまう $Q|\Omega\rangle \neq |\Omega\rangle$ として特徴づけられる．しかし体積無限大 $V \rightarrow \infty$ の熱力学極限ではこの状態は $\langle \Omega | Q Q | \Omega \rangle = V \int d^{d+1}x \langle \Omega | j^0(x) j^0(0) | \Omega \rangle \propto V \rightarrow \infty$ となり、発散して規格化がうまくできない．ここでは、代わりに対称性の自発的破れは、ある局所演算子 $\phi(x)$ が存在して、

$$\langle \Omega | [iQ, \phi(x)] | \Omega \rangle \neq 0 \quad (29)$$

となることと定義する．局所演算子と電荷の交換関係は、局所的なのでこの定義は、well-defined である．本稿では、(29) 式の左辺を秩序変数と呼ぶ．

相対論的な系における南部-Goldstone の定理は、連続対称性が自発的に破れると破れた対称性の数だけ線形の分散関係を持った質量ギャップを持たない NG モードが現れるということを主張する [2, 3, 4, 5]．この定理の証明には、エネルギースペクトルを用いた方法と、有効ポテンシャルを用いた方法などがある．ここでは、直感的にも分かりやすいポテンシャルを用いた方法を紹介する．対称性 G を持った実スカラー場の理論を考える．場の自由度を ϕ_n とし、場のポテンシャルを $V(\phi)$ とする．場は G の元で $\phi_n \rightarrow (R\phi)_n$ と変換し、ポテンシャルはこの変換の元で不変であると

する: $V(\phi) = V(R\phi)$. R は G の表現行列で群の生成子 T_a を用いて $R = \exp(iT_a\theta^a)$ で表される. 場の理論では真空は, 場の期待値がポテンシャルが最小になる配位で表される. この点を $\bar{\phi}_n := \langle \phi_n \rangle$ と書く. もし, $\bar{\phi}_n = 0$ (図1左) であれば, 対応する真空は, 回転に対して不変である. 一方 $\bar{\phi}_n \neq 0$ (図1右) とすると, 回転によって $\bar{\phi}_n$ は値を $(R\bar{\phi})_n$ に変えてしまう⁴. これは対称性が自発的に破れていることを意味する. 回転した状態は $V(\bar{\phi}) = V(R\bar{\phi})$ より, すべて同じポテンシャルエネルギーを持つので, 無数の (ユニタリ非同値な) 基底状態の可能性が存在する事がわかる. 現実はどこか一つの状態が選ばれる. 場の理論では, ポテンシャルの曲率は質量項と関係し, 曲率がゼロであれば, 質量ギャップがないモードが存在することを意味する. 曲率がゼロになる条件を求めるために, 微小回転 $R\phi \simeq \phi + \theta^a iT_a\phi$ を考えよう. ポテンシャルの回転不変性から, θ^a の1次の項について, 以下の恒等式が成り立つ:

$$V(R\phi) - V(\phi) \simeq \theta^a \frac{\partial V}{\partial \phi_n} (iT_a\phi)_n = 0. \quad (30)$$

さらに両辺を ϕ_m で微分すると,

$$\theta^a \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_m \partial \phi_n} (iT_a\phi)_n + \theta^a \frac{\partial V}{\partial \phi_n} (iT_a)_{nm} = 0 \quad (31)$$

が得られる. 真空の停留条件 $\partial V / \partial \phi_n |_{\phi_n = \bar{\phi}_n} = 0$ を用いると質量行列を $M_{mn}^2 = \partial^2 V / \partial \bar{\phi}_m \partial \bar{\phi}_n$ として, $M_{mn}^2 (iT_a\bar{\phi})_n = 0$ が導かれる. この式は, 質量行列 M_{mn}^2 の零固有値 (= ポテンシャルの平らな方向) の数は少なくとも線形独立なベクトル $iT_a\bar{\phi}$ の数だけ現れることを意味する⁵. 場の理論では, このベクトルは, 保存電荷 Q_a を用いて, $-(iT_a\bar{\phi})_n = \langle [iQ_a, \phi_n] \rangle$ と表す事ができる. つまり秩序変数である. この独立なベクトルの数を N_{BS} とし, 破れた対称性の数と呼ぶことにする.

励起モードを考えるには有限波数を考え, 振動数がどのような値を取るか考える必要がある. Lorentz 対称性がある場の量子論では, その縛りから $\omega = |\mathbf{k}|$ という分散関係を持ったモードになる. さらに NG モードの数 N_{NG} は, ポテンシャルの平らな方向 = N_{BS} 破れた対称性の数に等しい, つまり, $N_{NG} = N_{BS}$ が主張できる. では, 相対論的であるという仮定を外した場合にはどのような事が主張できるだろうか? 線形独立な $\langle [iQ_a, \phi_n] \rangle$ の数だけポテンシャルに平らな方向が現れるという帰結は, 相対論的であることは使っていないので正しいだろう. しかしポテンシャルが平らな方向の自由度の時間発展を考えるとすべての自由度が独立であるとは限らない. 非相対論系では, 実際そのようなことが起きるのである.

Lorentz 対称性を仮定しない系において Nielsen と Chadha は, NG モードの波数の小さいところでの分散関係を用いて NG モードを Type-I, Type-II モードの2つに分類した [8]:

$$\text{Type-I: } \omega \sim |\mathbf{k}|^{2n+1}, \quad \text{Type-II: } \omega \sim |\mathbf{k}|^{2n}. \quad (32)$$

ここで n は整数である. つまり線形分散するモードは Type-I, 2乗分散するモードは Type-II に分類される. さらに彼らは, Type-I, Type-II モードの個数 N_I, N_{II} に関して, 不等式

$$N_I + 2N_{II} \geq N_{BS} \quad (33)$$

⁴厳密な事をいうと有効ポテンシャルは下に凸な関数で, (図1右) のように描くのは正しくないが, 自発的対称性の破れを理解する上ではこの図のイメージで十分である.

⁵なんらかのメカニズムによって, 質量行列が別のゼロ固有値を持つかもしれないが, ここではそれは起きないと仮定する.

を導いた．ここで，強磁性体と反強磁性体を例に実際にこの不等式がどうなるか見てみよう．強磁性，反強磁性共にスピンの回転対称性 $O(3)$ が $O(2)$ に自発的に破れている．したがって，破れた対称性の数は $N_{BS} = 2$ である．強磁性体では，2乗分散した NG モードが1つ，つまり $N_I = 0$, $N_{II} = 1$ であることが知られている．一方，反強磁性体では，線形分散の NG モードが2つで $N_I = 2$, $N_{II} = 0$ となる．これらを (33) 式に代入すると強磁性体，反強磁性体共に等号が成立しているのがわかる．他の多くの例でもこれが成り立っていることが知られている．一般的に等号が成立することを期待したいが，残念ながら必ずしもそうなるとはかぎらない．例えば， $\mathcal{L} = (\partial_0\pi)^2/2 - (\nabla^2\pi)^2/2$ というラグランジアンを持つ模型では， $\pi \rightarrow \pi + c$ という対称性を持ちそれが自発的に破れているとみなすことができるが，その NG モードは1つで，分散関係は， $\omega = k^2$ である．よって， $N_{II} = 1$, $N_{BS} = 1$ より， $N_I + 2N_{II} \geq N_{BS}$ の不等号は成立するが等式は成立しない⁶．等号が成立するより強力な関係式を得るためには他の方向性を考える必要がある．Schafer らは，カラー超伝導相中に現れた NG モードの研究の中で， $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle = 0$ ならば， $N_{BS} = N_{NG}$ となることに気づいた [9]．つまり， $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$ が NG モードの分類の鍵になるわけである．さらに南部は，2004 年の論文の中で $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle \neq 0$ に対して物理的意味を与えた [10]．それは $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle \neq 0$ である事は， Q_a と Q_b が正準共役の意味で独立な自由度ではないということの意味すると解釈できるというものである⁷．この独立でない自発的に破れた電荷のペアの数は $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$ を a, b の脚を持った行列とみなして， $N_B = \text{rank}([iQ_a, Q_b])/2$ と書ける⁸．その他の破れた電荷の数は $N_A = N_{BS} - 2N_B$ と書ける．独立でない自発的に破れた電荷のペアの数がそれぞれ1つのモードに対応し，残りの電荷はそれぞれひとつの NG モードに対応すると全体の NG モードの数は $N_{NG} = N_A + N_B$ と書けるので，

$$N_{NG} = N_{BS} - \frac{1}{2}\text{rank}([iQ_a, Q_b]) \quad (34)$$

という関係式が得られる．これは，まず渡辺-Brauner によって不等式として定式化 [11] され，その後，等号の成立が渡辺-村山 [12]，独立に我々の論文 [13] によって示された．

3.2 $SU(2) \times U(1)$ 模型

ここでは，前節で述べた Type-A, Type-B モードが実際にどの様に現れるか具体的な模型を使って解析しよう [9]．ここでは，(3+1) 次元時空中の $SU(2) \times U(1)$ 模型を考える．この模型は対称性が自発的に破れた時， $U(1)$ 化学ポテンシャルを導入するか否かによって，Type-B NG モードの有無が変化する模型になっている．

⁶ 座標に依存した対称性も許すと $\pi \rightarrow \pi + x^i b_i$ の変換に伴う対称性が存在する．この対称性に対する電荷は3つで自発的に破れていて，本文ですでに対称性を含めると4つの電荷が自発的に破れていることになる．Nielsen-Chadha の不等式は内部対称性に対するものなので本来は適用できないが仮に適用できたとすると等式を満たさないことがわかる（この場合不等式も満たしていない）．

⁷ 厳密には，電荷と電荷の交換関係が well-defined とは限らないので， $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$ は，有限体積 V で積分した極限 $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V d^d x \langle [iQ_a, j_b^0(x)] \rangle$ と解釈するほうが良い．

⁸ $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$ は電荷がエルミートなので実反対称行列になっていてランクは常に偶数である．

3.2.1 Type-A NG モード

まず，化学ポテンシャルがゼロの場合を考えてみよう．ラグランジアン密度は，以下のように与えられる：

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2. \quad (35)$$

ここで， $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ は 2 成分複素スカラー場である． λ は結合定数， m^2 は質量パラメータである．自発的対称性の破れを起こすために，質量項の符号を通常とは逆向きにとってある．このラグランジアン密度は大域的対称性 $SU(2) \times U(1)$ 変換 $\varphi \rightarrow U\varphi$ の元で不変である．ここで U は変換パラメータを θ^a として， $U = e^{iT_a \theta^a}$ と書ける．ここで， T_a は，

$$T_0 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

で与えられる． $i, j, k = 1, 2, 3$ に対して $[T_i, T_j] = \sum_k i \epsilon_{ijk} T_k$ の $SU(2)$ の Lie 代数を満たす (ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} = 1$ とした完全反対称テンソル)．対称性変換の元での場の微小変換は， $\theta^a = \epsilon^a$ として，

$$\delta \varphi_n = i \epsilon^a [T_a]_n^m \varphi_m \quad (37)$$

となる．微小変換の元でのラグランジアンの不変性は，Noether の定理 (Appendix B 節参照) により Noether カレントを導く：

$$j_a^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_n)} i [T_a]_n^m \varphi_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_n^*)} i [T_a^*]_n^m \varphi_m^* = i (\partial^\mu \varphi^\dagger T_a \varphi - \varphi^\dagger T_a \partial^\mu \varphi). \quad (38)$$

Noether カレントは運動方程式を用いる事により保存する： $\partial_\mu j_a^\mu = 0$ ．電荷は，電荷密度を空間積分することで得られ

$$Q_a = \int d^3 x j_a^0(t, \mathbf{x}) \quad (39)$$

と書ける． Q_a は対称性変換の生成子になっていて，量子化した後の場との交換関係は，

$$[iQ_a, \varphi_n] = -i [T_a \varphi]_n, \quad [iQ_a, \varphi_n^*] = +i [T_a \varphi]_n^* \quad (40)$$

である．ラグランジアンは複素場で書かれているが，後の議論のために場を $\varphi = (\chi_1 + i\chi_2, \psi_1 + i\psi_2) / \sqrt{2}$ と実場でパラメタライズしておく．ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_n)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi_n)^2 + \frac{m^2}{2} (\chi_n^2 + \psi_n^2) - \frac{\lambda}{4} (\chi_n^2 + \psi_n^2)^2 \quad (41)$$

となる ($n = 1, 2$)．また，保存カレントは，

$$j_0^\mu = \frac{1}{2} (\partial^\mu \chi_2 \chi_1 - \partial^\mu \chi_1 \chi_2 + \partial^\mu \psi_2 \psi_1 - \partial^\mu \psi_1 \psi_2), \quad (42)$$

$$j_1^\mu = \frac{1}{2} (\partial^\mu \psi_2 \chi_1 - \partial^\mu \chi_1 \psi_2 + \partial^\mu \chi_2 \psi_1 - \partial^\mu \psi_1 \chi_2), \quad (43)$$

$$j_2^\mu = \frac{1}{2} (\partial^\mu \chi_1 \psi_1 - \partial^\mu \psi_1 \chi_1 + \partial^\mu \chi_2 \psi_2 - \partial^\mu \psi_2 \chi_2), \quad (44)$$

$$j_3^\mu = \frac{1}{2} (\partial^\mu \chi_2 \chi_1 - \partial^\mu \chi_1 \chi_2 + \partial^\mu \psi_1 \psi_2 - \partial^\mu \psi_2 \psi_1) \quad (45)$$

と書ける．さてここで，エネルギーが最低となる状態を求めてみよう．解は時間，空間座標に依存しないとするとポテンシャル $V(\varphi) = -m^2\varphi^\dagger\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2 = -m^2(\chi_n^2 + \psi_n^2)/2 + \lambda(\chi_n^2 + \psi_n^2)^2/4$ を最小化すれば良い．停留点を与える式は，

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = -m^2\varphi_n^\dagger + 2\lambda(\varphi^\dagger\varphi)\varphi_n^\dagger = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_n^\dagger} = -m^2\varphi_n + 2\lambda(\varphi^\dagger\varphi)\varphi_n = 0, \quad (46)$$

または，

$$\frac{\partial V}{\partial \chi_n} = -m^2\chi_n + \lambda(\chi_n^2 + \psi_n^2)\chi_n = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi_n} = -m^2\psi_n + \lambda(\chi_n^2 + \psi_n^2)\psi_n = 0 \quad (47)$$

となる．自明な解として， $\varphi_n^\dagger = \varphi_n = 0$ があるが， $m^2 > 0$ の場合これは，ポテンシャルの極大点を与える．もう一つの解は， $\varphi^\dagger\varphi = m^2/(2\lambda)$ を満たす解でこれは V の最小値を与える．最小値を与える φ は複数ある．もしある $\varphi = \bar{\varphi}$ が解であるとするそれを対称性変換した $U\bar{\varphi}$ も解になっている．陽な対称性の破れがない場合は，どの解を選ぶかという任意性があるがどの解を選んでも物理は変わらない．ここでは解として $\varphi = (0, v/\sqrt{2}) := \bar{\varphi}$, ($v = \sqrt{m^2/\lambda}$) を選ぼう．これは， $\langle \psi_1 \rangle = v$ に対応する．この解は， $e^{i(T_0+T_3)\theta}\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ の元で不変なので， $Q = Q_0 + Q_3$ は破れていない対称性の生成子となる．一方， $e^{i(T_1\theta^1+T_2\theta^2+(T_0-T_3)\theta')}\bar{\varphi} \neq \bar{\varphi}$ なので破れた対称性の生成子は $Q_1, Q_2, Q' := (Q_0 - Q_3)/2$ である．つまり，群 $G = SU(2) \times U(1)$ が $H = U(1)$ に自発的に破れたといえる．実際，破れた電荷と場との交換関係の期待値は，

$$\langle [iQ_1, \chi_2] \rangle = \langle [iQ_2, \chi_1] \rangle = \langle [iQ', \psi_2] \rangle = -\frac{1}{2}v \quad (48)$$

となっている．他の電荷と場の交換関係の期待値はゼロである．破れていない対称性の元では，

$$[iQ, \chi_1] = \chi_2, \quad [iQ, \chi_2] = -\chi_1, \quad [iQ, \psi_2] = 0, \quad [iQ, \psi_1] = 0 \quad (49)$$

と変換する．これより χ_i は 2 重項， ψ_i は 1 重項となっていることがわかる．次に， $\psi_1 = \psi'_1 + v$ として，ポテンシャルを期待値の周りで展開してみよう．場のゼロ次の項は $V(v)$ である．また，場の 1 次の項はポテンシャルの停留条件 (47) から消える．2 次の項は，

$$\begin{aligned} V(\varphi)_{\text{quad}} &= \frac{1}{2}(\lambda v^2 - m^2)(\chi_n^2 + \psi_2^2 + \psi_1^2) + 2\lambda v^2 \frac{1}{2}\psi_1'^2 \\ &= m_{\psi_1'}^2 \frac{1}{2}\psi_1'^2 \end{aligned} \quad (50)$$

となる．ここで， $m_{\psi_1'}^2 := 2\lambda v^2 = 2m^2$ とした． χ_1, χ_2, ψ_2 についての質量項が存在しないので，質量ゼロの独立な励起モードが 3 つあることを示唆する．運動項を加えて，分散関係を見てみよう．ラグランジアン密度の場の 2 次の項は，

$$\mathcal{L}_{\text{quad}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_n)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi_2)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi_1')^2 - \frac{1}{2}m_{\psi_1'}^2 \psi_1'^2 \quad (51)$$

となる． χ_1, χ_2, ψ_2 には質量項がないので，運動方程式 $\partial_\mu^2 \chi_1 = 0, \partial_\mu^2 \chi_2 = 0, \partial_\mu^2 \psi_2 = 0$ より $\omega = |\mathbf{k}|$ という線形分散が得られる．一方 ψ_1' は質量項を持ち $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_{\psi_1'}^2}$ となる．破れた電荷密度は，

χ_n, ψ_2, ψ'_1 に共役な場を $\pi_{\chi_n} := \partial_0 \chi_n, \pi_{\psi_2} := \partial_0 \psi_2, \pi_{\psi'_1} := \partial_0 \psi'_1$ として

$$n_1 = -\frac{1}{2}v\pi_{\chi_2} + \frac{1}{2}(\pi_{\chi_1}\psi_2 - \pi_{\psi_2}\chi_1 + \pi_{\psi_1}\chi_2 - \pi_{\chi_2}\psi'_1), \quad (52)$$

$$n_2 = -\frac{1}{2}v\pi_{\chi_1} + \frac{1}{2}(\pi_{\psi_1}\chi_1 - \pi_{\chi_1}\psi'_1 + \pi_{\psi_2}\chi_2 - \pi_{\chi_2}\psi_2), \quad (53)$$

$$n' = -\frac{1}{2}v\pi_{\psi_2} + \frac{1}{2}(\pi_{\psi_1}\psi_2 - \pi_{\psi_2}\psi'_1), \quad (54)$$

$$n = \pi_{\chi_1}\chi_2 - \pi_{\chi_2}\chi_1 \quad (55)$$

となる．破れた電荷には，場の 1 次が含まれ，非線形項を無視すると，電荷と NG 場が正準共役関係にあることがわかる．従って，NG モードは，NG 場と保存電荷密度が正準共役になって伝播するモードとみなすことができる．ハミルトニアン密度の場の 2 次の項は，

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} = \frac{1}{2}\pi_{\chi_n}^2 + \frac{1}{2}\pi_{\psi'_1}^2 + \frac{1}{2}\pi_{\psi_2}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\chi_n)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\psi'_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\psi_2)^2 + \frac{1}{2}m_{\psi'_1}^2\psi'^2_1 \quad (56)$$

で与えられが，電荷密度を用いて

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} = \frac{2}{v^2}n_1^2 + \frac{2}{v^2}n_2^2 + \frac{2}{v^2}n'^2 + \frac{1}{2}\pi_{\psi'_1}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\chi_n)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\psi_2)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\psi'_1)^2 + \frac{1}{2}m_{\psi_1}^2\psi'^2_1 \quad (57)$$

と書き直すこともできる．これは電荷密度と NG 場の有効ハミルトニアンを与える．特徴としては，NG 場の係数には微分がかかっている．一方共役な自由度である電荷密度には微分がかかっていない．次節で見るとこの特徴は，Type-B が出る場合とは異なる．

3.2.2 Type-B NG モード

次に Type-B が現れる例として，化学ポテンシャルが入った場合を考えてみよう．これは，単に時間微分を ∂_0 を $\partial_0 - i\mu$ に置き換えれば良い．そうすると，時間微分の項は，

$$(\partial_0 + i\mu)\varphi^\dagger(\partial_0 - i\mu)\varphi = \partial_0\varphi^\dagger\partial_0\varphi - i\mu(\partial_0\varphi^\dagger\varphi - \varphi^\dagger\partial_0\varphi) + \mu^2\varphi^\dagger\varphi \quad (58)$$

となる．ラグランジアンは， $\varphi = (\chi_1 + i\chi_2, \psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}$ を用いて書くと，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\chi_n)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi_n)^2 + \frac{m^2 + \mu^2}{2}(\chi_n^2 + \psi_n^2) - \frac{\lambda}{4}(\chi_n^2 + \psi_n^2)^2 + \mu\epsilon^{nm}((\partial_0\chi_n)\chi_m + (\partial_0\psi_n)\psi_m) \quad (59)$$

となる．ここで， ϵ^{nm} は反対称テンソルで， $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$ とする．従ってポテンシャルを最小化する問題に対して，化学ポテンシャルのない場合の質量項 m^2 を $\mu^2 + m^2$ に置き換えれば前節の議論はそのまま利用できる．真空期待値は， $\langle\psi_1\rangle = v = \sqrt{(m^2 + \mu^2)/\lambda}$ となる．対称性の破れのパターンは，先ほどと同じ $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ である．では，分散関係はどうだろうか？分散関係は化学ポテンシャルが入ったことで若干複雑になる．化学ポテンシャルを含む項を χ_n, ψ_2, ψ'_1 を用いて表すと，

$$\begin{aligned} i(\partial_0\varphi^\dagger\varphi - \varphi^\dagger\partial_0\varphi) &= -(\partial_0\chi_1)\chi_2 + (\partial_0\chi_2)\chi_1 - (\partial_0\psi_1)\psi_2 + (\partial_0\psi_2)\psi'_1 + (\partial_0\psi_2)v \\ &= -\epsilon^{nm}(\partial_0\chi_n)\chi_m - \epsilon^{nm}(\partial_0\psi_n)\psi_m + (\partial_0\psi_2)v \end{aligned} \quad (60)$$

となっている．最後の項は全微分になっているので運動方程式に効かない．これより運動方程式は，

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu^2 & -2\mu\partial_0 \\ 2\mu\partial_0 & \partial_\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (61)$$

及び

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu^2 + 2(m^2 + \mu^2) & -2\mu\partial_0 \\ 2\mu\partial_0 & \partial_\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (62)$$

となる．これらを解くと， χ_1, χ_2 について，正エネルギー解は， $\omega = \sqrt{k^2 + \mu^2} \pm \mu$ となる． k が小さい所で， $k^2/(2\mu)$ 及び， 2μ となる．従って k^2 に比例した分散関係を持つ NG モードが現れた．重たくなった方のモードの質量は，massive NG ボソンと呼ばれ， $k = 0$ でのギャップ $\omega = 2\mu$ は相互作用を入れても変化しない [14, 15, 16]．化学ポテンシャルが入ったことで χ_1 と χ_2 の自由度は独立なモードではなくなり，質量がゼロのままのモードと有限の質量を持ったモードに分裂した． ψ_n の分散関係は，

$$\omega = \sqrt{3\mu^2 + m^2 + k^2} \pm \sqrt{(3\mu^2 + m^2)^2 + 4\mu^2 k^2} \quad (63)$$

となる． k が小さい所で， $\omega = \sqrt{2(3\mu^2 + m^2)}$ 及び， $\omega = \sqrt{(m^2 + \mu^2)/(m^2 + 3\mu^2)}|k|$ となり，重たい NG モードと線形分散を持ったモードが現れるのがわかる．ここまでをまとめると， $SU(2) \times U(1)$ 対称性が自発的に破れたが，NG モードとしては，2 乗分散と線形分散を持った NG モードがそれぞれ 1 つずつ現れた．

次にこれをハミルトニアン密度を使って見てみる [10]．

$$\pi_{\chi_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \chi_n} = \partial_0 \chi_n + \mu \epsilon^{nm} \chi_m, \quad (64)$$

$$\pi_{\psi_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi_n} = \partial_0 \psi_n + \mu \epsilon^{nm} \psi_m \quad (65)$$

となることに注意して，ハミルトニアン密度は，

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \partial_0 \chi_n \pi_{\chi_n} + \partial_0 \psi_n \pi_{\psi_n} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi_{\chi_n}^2 + \frac{1}{2} \pi_{\psi_n}^2 - \mu(\pi_{\chi_1} \chi_2 - \pi_{\chi_2} \chi_1 + \pi_{\psi_1} \psi_2 - \pi_{\psi_2} \psi_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\nabla \chi_n)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_n)^2 - \frac{m^2}{2} (\chi_n^2 + \psi_n^2) + \frac{\lambda}{4} (\chi_n^2 + \psi_n^2)^2 \end{aligned} \quad (66)$$

と書ける．基底状態はこのハミルトニアン密度を最小化して求めることができる．簡単な計算で，解は，先ほどと同じ真空に取って $\psi_1 = v$ ， $\pi_{\psi_2} = -\mu v$ となるのがわかる．この時， $\psi_1 = \psi'_1 + v$ ， $\pi_{\psi_2} = \pi_{\psi'_2} - v\mu$ とシフトして，ハミルトニアン密度の 2 次の項は，

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{quad}} &= \frac{1}{2} \pi_{\chi_n}^2 + \frac{1}{2} \pi_{\psi_1}^2 + \frac{1}{2} \pi_{\psi'_2}^2 - \mu(\pi_{\chi_1} \chi_2 - \pi_{\chi_2} \chi_1 + \pi_{\psi_1} \psi_2 - \pi_{\psi'_2} \psi_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\nabla \chi_n)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \psi'_1)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_2)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \chi_n^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \psi_2^2 + \frac{1}{2} (2m^2 + 3\mu^2) \psi_1'^2 \end{aligned} \quad (67)$$

となる．このシフトによって，保存電荷密度は，

$$n_1 = -\frac{1}{2}v\pi_{\chi_2} + \frac{1}{2}\mu v\chi_1 + \frac{1}{2}(\pi_{\chi_1}\psi_2 - \pi_{\psi_2'}\chi_1 + \pi_{\psi_1}\chi_2 - \pi_{\chi_2}\psi_1'), \quad (68)$$

$$n_2 = -\frac{1}{2}v\pi_{\chi_1} - \frac{1}{2}\mu v\chi_2 + \frac{1}{2}(\pi_{\psi_1}\chi_1 - \pi_{\chi_1}\psi_1' + \pi_{\psi_2'}\chi_2 - \pi_{\chi_2}\psi_2'), \quad (69)$$

$$n' = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{1}{2}v\pi_{\psi_2'} + \frac{1}{2}\mu v\psi_1' + \frac{1}{2}(\pi_{\psi_1}\psi_2 - \pi_{\psi_2'}\psi_1'), \quad (70)$$

$$n = (\pi_{\chi_1}\chi_2 - \pi_{\chi_2}\chi_1) \quad (71)$$

となる．これから，

$$\langle [iQ_1, n_2] \rangle = -\langle [iQ_2, n_1] \rangle = -\langle n_3 \rangle = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (72)$$

となることがわかる．他の電荷と電荷密度の交換関係の期待値はゼロである．これは，電荷密度も秩序変数になっている事を意味する． $\langle [iQ_i, n_j] \rangle \neq 0$ となる電荷を Type-B と定義しよう．また他の電荷を Type-A と定義する．

ハミルトニアン密度の 2 次の項について電荷密度を用いて書き直すと，

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{quad}} = & \frac{2}{v^2}(n_2 + \mu v\chi_2)^2 + \frac{2}{v^2}(n_1 - \mu v\chi_1)^2 + \frac{2}{v^2}(\delta n' - \mu v\psi_1')^2 + \frac{1}{2}(\pi_{\psi_1} - \mu\psi_2)^2 \\ & + \frac{1}{2}(\nabla\chi_n)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\psi_1')^2 + \frac{1}{2}(\nabla\psi_2)^2 + \frac{1}{2}(2m^2 + 2\mu^2)\psi_1'^2 \end{aligned} \quad (73)$$

となる．ここで， $\delta n' := \delta n - \frac{1}{2}\mu v^2$ である． χ_n を含む項に注目すると，

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} = \frac{2}{v^2}(n_2 + \mu v\chi_2)^2 + \frac{2}{v^2}(n_1 - \mu v\chi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\chi_n)^2 \quad (74)$$

である． χ_n を運動方程式を用いて消去すると，

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} = -\frac{2}{v^2}n_i \frac{\nabla^2}{4\mu^2} \frac{1}{1 - \nabla^2/(4\mu^2)} n_i \simeq \frac{1}{2\mu^2 v^2} (\nabla n_i)^2 \quad (75)$$

の有効ハミルトニアンが得られる．ここで，微分の高次項は落とした．この時， n_i についての運動方程式は，

$$\begin{aligned} \partial_0 n_1 &= -\frac{\mu v^2 - \nabla^2}{2 \mu^2 v^2} n_2, \\ \partial_0 n_2 &= \frac{\mu v^2 - \nabla^2}{2 \mu^2 v^2} n_1 \end{aligned} \quad (76)$$

となり，分散関係 $\omega = k^2/(2\mu)$ が得られる．同様に， ψ_1' , ψ_2 の方は， ψ_1' の自由度を消去して，

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} \simeq \frac{1}{2} \frac{4(m^2 + \mu^2)}{v^2(m^2 + 3\mu^2)} (\delta n')^2 + \frac{1}{2} (\nabla\psi_2)^2 \quad (77)$$

となる．運動方程式は，

$$\partial_0 \psi_2 = -\frac{v}{2} \frac{4(m^2 + \mu^2)}{v^2(m^2 + 3\mu^2)} \delta n', \quad (78)$$

$$\partial_0 \delta n' = \frac{v}{2} (-\nabla^2) \psi_2 \quad (79)$$

となる．従って， $\omega = \sqrt{(m^2 + \mu^2)/(m^2 + 3\mu^2)}|k|$ となる．

有効ハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu^2 v^2} (\nabla n_i)^2 + \frac{1}{2} \frac{4(m^2 + \mu^2)}{v^2(m^2 + 3\mu^2)} (\delta n')^2 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_2)^2 \quad (80)$$

を見てみると，Type-B に関しては， n_i の前に微分がかかっている．これは， n_i が保存電荷密度でありかつ NG 場であることのあらわれである．一方，Type-A モードに関しては，電荷密度 $\delta n'$ の前に微分はかかっていない．これが有効ハミルトニアンでみた Type-A と Type-B モードの違いである．

3.3 Langevin 方程式を用いた NG モードの解析

Type-A および Type-B の NG モードがどのように現れるか見るために Langevin 方程式を用いた解析を紹介しよう．Langevin 方程式の解析では，有限温度系も含む一般の NG モードの分散関係を見ることができる．ここでは，Type-A NG モードの例として $U(1)$ 対称性が破れた場合を考える．また，Type-B NG モードの例として $SU(2)$ が $U(1)$ に破れる模型を考える．ここでの解析は古典論の現象論的模型によるものであるが量子論でも本質的に同じで，射影演算子法を用いることで正当化される [17, 18]．

3.3.1 Type-A NG モード

$U(1)$ 対称性が自発的に破れている場合を考えよう． $U(1)$ 電荷及び電荷密度をそれぞれ Q 及び $n(x)$ とする．また， $\pi(x)$ を NG 場とする．表記の煩雑さを避けるため $\langle n(x) \rangle = 0$ となる場合を考えることにする⁹．自発的に対称性が破れると，量子論では， $\langle [iQ, \pi(x)] \rangle \neq 0$ となるが，これに対応して，電荷と NG 場間のポアソン括弧が有限になる¹⁰：

$$\{\pi(\mathbf{x}), Q\}_P = 1. \quad (81)$$

ここで， $\pi(x)$ は適当に規格化して，ポアソン括弧が 1 になるようにしてある．この関係式は，局所的な場のポアソン括弧が

$$\{\pi(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}')\}_P = \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \dots \quad (82)$$

となることを意味する．ここで \dots は微分の高次項を表す．自由エネルギーは， n, π を変数として，

$$F[n, \pi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \chi^{-1} n(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \nabla \pi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \pi(\mathbf{x}) \right) + \dots \quad (83)$$

と展開できる．ここで， χ は感受率， ρ は定数で \dots は高次の微分及び場の非線形項を表す． π に関する項が微分から始まるのは，ポテンシャルが“平ら”であることの帰結である．Langevin 方程式は，

$$\partial_0 \pi(t, \mathbf{x}) = \{\pi(t, \mathbf{x}), F\}_P - \gamma \frac{\partial F}{\partial \pi(t, \mathbf{x})} + \xi_\pi(t, \mathbf{x}), \quad (84)$$

$$\partial_0 n(t, \mathbf{x}) = \{n(t, \mathbf{x}), F\}_P + \sigma \nabla^2 \frac{\partial F}{\partial n(t, \mathbf{x})} + \xi_n(t, \mathbf{x}). \quad (85)$$

⁹ $\langle n(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$ の場合には，ダイナミカルな自由度として $n(\mathbf{x})$ の代わりに $\delta n(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}) - \langle n(\mathbf{x}) \rangle$ を用いれば良い．

¹⁰正準量子化はポアソン括弧 $\{-, -\}_P$ に $-i[-, -]$ を対応させる操作だったことを思い出そう．

で与えられ、ノイズの相関は、揺動散逸定理を満たす:

$$\langle \xi_\pi(t, \mathbf{x}) \xi_\pi(t', \mathbf{x}') \rangle = 2T\gamma\delta(t-t')\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad (86)$$

$$\langle \xi_n(t, \mathbf{x}) \xi_n(t', \mathbf{x}') \rangle = -2T\sigma\nabla^2\delta(t-t')\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (87)$$

ここで、 T 、 γ 及び σ は温度、散逸パラメータ及び輸送係数である。(85) 式は空間微分項を含むが、これは保存則からの帰結である。線形の範囲で Langevin 方程式は、

$$\partial_0\pi(t, \mathbf{x}) = \chi^{-1}n(t, \mathbf{x}) + \gamma\rho\nabla^2\pi(t, \mathbf{x}) + \xi_\pi(t, \mathbf{x}), \quad (88)$$

$$\partial_0n(t, \mathbf{x}) = \rho\nabla^2\pi(t, \mathbf{x}) + \sigma\chi^{-1}\nabla^2n(t, \mathbf{x}) + \xi_n(t, \mathbf{x}) \quad (89)$$

と書ける。ノイズを落とした斉次の項について、逐次的に解くと

$$(\partial_0 - \sigma\chi^{-1}\nabla^2)(\partial_0 - \gamma\rho\nabla^2)\pi(t, \mathbf{x}) = \chi^{-1}\rho\nabla^2\pi(t, \mathbf{x}) \quad (90)$$

が導かれる。この方程式から分散関係を読み取ると、

$$\omega = \pm v|\mathbf{k}| - i\Gamma|\mathbf{k}|^2, \quad (91)$$

となる。ここで、 $v = \sqrt{\chi^{-1}\rho}$ 、 $\Gamma = (\sigma\chi^{-1} + \gamma\rho)/2$ 。従って、Type-A NG モードは、実部が $|\mathbf{k}|$ に線形で虚部が 2 乗の分散関係を持つことがわかる。

3.3.2 Type-B NG モード

次に、 $SU(2)$ 対称性が $U(1)$ 対称性に破れる場合を考えよう。電荷密度 $n_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, 3$) は、カレント代数 $\{Q_i, n_j(\mathbf{x})\}_P = \sum_k \epsilon_{ijk} n_k(\mathbf{x})$ ($\epsilon_{123} = 1$) を満たす。自発的対称性の破れのパターンとして n_3 に値を持つような場合を考えよう:

$$\{Q_1, n_2(\mathbf{x}')\}_P = -\{Q_2, n_1(\mathbf{x}')\}_P = n_3 \neq 0. \quad (92)$$

電荷と電荷密度の間に有限のポアソン括弧を持つのでこれは、Type-B ということになる。この時 Q_1, Q_2 は破れた対称性の生成子となる。(92) 式は局所的には、

$$\{n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}')\}_P = n_3\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \dots \quad (93)$$

と書けることを意味する。また、自由エネルギーは、 n_1, n_2 を自由度として

$$F[n_1, n_2] = \int d^d x \left(\frac{\rho'}{2} \nabla n_1(\mathbf{x}) \nabla n_1(\mathbf{x}) + \frac{\rho'}{2} \nabla n_2(\mathbf{x}) \nabla n_2(\mathbf{x}) \right) + \dots \quad (94)$$

と展開される。 n_1, n_2 は対称性の生成子であると同時に NG 場であるため自由エネルギーに微分を含んでいる。これが Type-B の特徴である。運動方程式は、

$$\partial_0 n_1(t, \mathbf{x}) = -n_3 \rho' \nabla^2 n_2(t, \mathbf{x}) - \sigma' \rho' (\nabla^2)^2 n_1(t, \mathbf{x}) + \xi_1(t, \mathbf{x}), \quad (95)$$

$$\partial_0 n_2(t, \mathbf{x}) = n_3 \rho' \nabla^2 n_1(t, \mathbf{x}) - \sigma' \rho' (\nabla^2)^2 n_2(t, \mathbf{x}) + \xi_2(t, \mathbf{x}) \quad (96)$$

となる．ノイズは，揺動散逸定理を満たすように選ばれる：

$$\langle \xi_i(t, \mathbf{x}) \xi_j(t', \mathbf{x}') \rangle = -2T \sigma' \delta_{ij} \nabla^2 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (97)$$

育次の部分について， $n_1(t, \mathbf{x})$ についての運動方程式は，

$$\left(\partial_0 + \sigma' \rho' (\nabla^2)^2 \right)^2 n_1(t, \mathbf{x}) = -n_3^2 \rho'^2 (\nabla^2)^2 n_1(t, \mathbf{x}) \quad (98)$$

となる．従って，分散関係は，

$$\omega = \pm v' |\mathbf{k}|^2 - i \Gamma' |\mathbf{k}|^4 \quad (99)$$

と読み取ることができる．ここで $v' = |n_3| \rho'$ 及び $\Gamma' = \sigma' \rho'$ である．現れた NG モードは 1 つであることに注意する．これは， n_1 と n_2 がポテンシャルの中では平らな方向の独立な自由度であったが，時間発展においては，(92) 式または (93) 式のため独立な自由度ではなく 1 つのモードになるためである．

ここでの解析では，Type-A 及び Type-B について別々に考えたがこれらが複雑に混ざりある場合を考えることができる．その場合は，可能な破れた電荷密度及び NG 場を選んで上記の解析を行ない，一般的な公式 (34) 式を得ることができる [13, 19] ．

3.4 Type-A と Type-B の直感的理解のための古典的模型

先端に小さなコマが付いた長さ l の振り子の力学を考えよう．振り子の端点は固定され，端点とコマをつなぐ線は無限小質量の剛体とする．重力がない場合，静止した状態がエネルギー最小になる．振り子はどの向きでも向くことができるが，静止した状態はどこの向きを選ばなければならないので，自発的に状態が破れる．静止した振り子の向きを z 方向としよう．この時， z 軸の周りの回転に対して状態を変えない．一方， x 軸， y 軸の周りの回転に対して位置を変える．従って，破れた生成の数は 2 つである．対称性は $SO(3)$ が $SO(2)$ に自発的に破れたことになる．小さな重力が存在する場合，振り子は重力と同じに向きに向いた状態がエネルギー最低の状態になる（この方向を z 軸とする）．ある時刻に振り子に小さな外力を加えると，振り子は単振動する． x 方向， y 方向の 2 方向に振動できるので，独立な振動は 2 つである．これは，破れた生成子の数に対応し，Type-A に対応した運動にほかならない．一方，先端のコマが回っている場合は，振り子は歳差運動を行い，独立な運動の方向は 1 方向に制限されてしまう．この運動は Type-B に対応する．振り子が回転しているか否かは， z 方向の角運動量 L_z が有限であるかどうかに対応し，これは Type-B の秩序変数 $\{L_x, L_y\}_P = L_z \neq 0$ になっている．このように Type-A，Type-B のメカニズムは古典力学にも現れる．この節では，このメカニズムがラグランジアンでどのように見えるか議論する．場の理論の言葉ではこれは次節で解説する有効ラグランジアンの方法に対応する．剛体を質点の集まりとして記述するとラグランジアンは，

$$L = \sum_n \left(\frac{1}{2} m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2 + m_n \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_n \right) \quad (100)$$

となる．端点が固定されているので運動は， \mathbf{x}_n^0 をある座標系の位置ベクトルとして， $\mathbf{x}_n(t) = R(t)\mathbf{x}_n^0$ と書ける．ここで， $R(t)$ は回転行列である．時間微分は， $\dot{\mathbf{x}}_n = \dot{R}\mathbf{x}_n^0$ と書くことができる．これより，運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{\mathbf{x}}_n^{0t} \dot{R}^t \dot{R} \mathbf{x}_n^0 = \frac{1}{4} \text{tr} I \text{tr} \dot{R}^t \dot{R} - \frac{1}{2} \text{tr} \dot{R}^t \dot{R} I \quad (101)$$

となる．ここで， I は慣性テンソルで $I := \sum_n m_n ((\mathbf{x}_n^0 \cdot \mathbf{x}_n^0) \mathbf{1} - \mathbf{x}_n^0 \mathbf{x}_n^{0t})$ である． $\mathbf{1}$ は 3×3 の単位行列である． I の固有値を I_i とする． I は軸対称なので， $I_1 = I_2$ となる． I_3 は，振り子が質点の場合はゼロである． I が対角になる座標系では， $I = I_1 \mathbf{1} + (I_3 - I_1) P$ と書ける．ここで， $P = \text{diag}(0, 0, 1)$ とした．従って，ラグランジアンは，

$$\begin{aligned} L &= \frac{I_1 - I_3}{2} \text{tr} \dot{R}^t \dot{R} P + gMl \text{tr} R P + \frac{I_3}{4} \text{tr} \dot{R}^t \dot{R} \\ &= \frac{I_1 - I_3}{2} \text{tr} (-iR^t \dot{R})^2 P + gMl \text{tr} R P + \frac{I_3}{4} \text{tr} (-iR^t \dot{R})^2 \end{aligned} \quad (102)$$

となる．ここで， M は重心の質量． l は重心までの距離を表す．1 行目から 2 行目は $R^t R = 1$ 及び， $\dot{R}^t R + R^t \dot{R} = 0$ を用いて， $\dot{R}^t \dot{R} = \dot{R}^t R R^t \dot{R} = -(R^t \dot{R})(R^t \dot{R}) = (-iR^t \dot{R})^2$ を使って変形した．さてここで，回転行列を $R = \tilde{R} R_3$ と分解し， $\tilde{R} = e^{iT_1 \pi^1 + iT_2 \pi^2}$ 及び $R_3 = e^{iT_3 \pi^3}$ とパラメタライズしよう． T_a は $SO(3)$ 群の生成子で， $[T_a, T_b] = \sum_c i \epsilon_{abc} T_c$ を満たす． ϵ_{abc} は完全反対称テンソルで $\epsilon_{123} = 1$ を満たすものとする．具体的な表現行列は，

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (103)$$

である．この行列は $\text{tr} T_a T_b = 2\delta_{ab}$ を満たす． $-iR^t \dot{R}$ は，

$$-iR^t \dot{R} = -iR_3^t (\tilde{R}^t \dot{\tilde{R}}) R_3 - iR_3^t \dot{R}_3 = R_3^t \alpha_t R_3 + T_3 \dot{\pi}^3 \quad (104)$$

と書ける．ここで $\alpha_t = -i\tilde{R}^t \dot{\tilde{R}}$ とした．これは，Maurer-Cartan 1 形式と呼ばれる．さらに，

$$\alpha_{t\perp} = \frac{1}{2} T_1 \text{tr} T_1 \alpha_t + \frac{1}{2} T_2 \text{tr} T_2 \alpha_t, \quad \alpha_{t\parallel} = \frac{1}{2} T_3 \text{tr} T_3 \alpha_t \quad (105)$$

を定義して， $\alpha_t = \alpha_{t\perp} + \alpha_{t\parallel}$ と分解する．すると，

$$-iR^t \dot{R} = R_3^t \alpha_{t\perp} R_3 + (\alpha_{t\parallel} + T_3 \dot{\pi}^3) \quad (106)$$

となる．よってラグランジアンは，

$$L = \frac{I_1}{4} \text{tr} \alpha_{t\perp}^2 + gMl \text{tr} \tilde{R} P + \frac{I_3}{4} \text{tr} (\alpha_{t\parallel} + T_3 \dot{\pi}^3)^2 \quad (107)$$

となる．さらに π_1, π_2 が小さいとして，展開すると，

$$\begin{aligned} \alpha_{t\perp} &= T_1 \dot{\pi}^1 + T_2 \dot{\pi}^2 + \dots, & \alpha_{t\parallel} &= \frac{1}{2} T_3 \epsilon_{ab3} \pi^a \dot{\pi}^b + \dots, \\ \tilde{R} &= 1 + i(T_1 \pi^1 + T_2 \pi^2) + \frac{-1}{2} (T_1 \pi^1 + T_2 \pi^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (108)$$

となり, π_1, π_2 について 2 次まででラグランジアンは,

$$L = \frac{I_1}{2}((\dot{\pi}^1)^2 + (\dot{\pi}^2)^2) - \frac{Mgl}{2}((\pi^1)^2 + (\pi^2)^2) + \frac{1}{2I_3}L_z^2 + \frac{1}{2}L_z\epsilon_{ab3}\pi^a\dot{\pi}^b + O(\pi^3) \quad (109)$$

となる. ここで $L_z = I_3\dot{\pi}_3$ とした. コマが回転していない場合は, $L_z = 0$ でこのラグランジアンは, 調和振動子となる. これは, 調和振動子なので運動方程式の解は $\pi^1 = A \cos(\omega t + \theta)$ で

$$\omega^2 = \frac{\langle M\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \rangle}{I_1} \quad (110)$$

となる. ここで, A, θ は定数で, 期待値はエネルギーが最低の解を表す $\langle \mathbf{x} \rangle := \mathbf{x}_0$. 振動数は \sqrt{g} に比例したものとなり, これは Type-A モードの特徴である. QCD で対応するギャップと陽な破れの項の関係式は Gell-Mann–Oakes–Renner 関係式と呼ばれる [20]. 一方, コマが回転している場合は, $L_z \neq 0$ となる. コマが十分早く回転しているとして, I_1 の項を無視しよう. するとラグランジアンは,

$$L = \frac{L_z}{2}\epsilon_{ab3}\pi^a\dot{\pi}^b - \frac{Mgl}{2}((\pi^1)^2 + (\pi^2)^2) \quad (111)$$

となる. 重要な点は, 時間の一回微分項が現れる点である. 係数は $L_z = \{L_x, L_y\}$ と書き直してもよい. 運動方程式は,

$$L_z\epsilon_{ab3}\dot{\pi}^b - Mgl\pi^a = 0 \quad (112)$$

となり, 先ほどと同じように解を求めると, 振動数は,

$$\omega^2 = \frac{\langle M\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \rangle^2}{L_z^2} \quad (113)$$

となる. 先ほどの場合と異なり, 振動数は, \sqrt{g} ではなく g に比例している. これは Type-B モードのギャップの特徴である. 場の理論では, これに空間微分の項が加わり, $g \rightarrow g + \mathbf{k}^2$ のように変更をうける. これを認めるとすると, $g \rightarrow 0$ の極限で, Type-A, Type-B が $|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}|^2$ の振る舞いをすることがわかる.

ここで得られたラグランジアンは, 場の量子論では有効ラグランジアンと呼ばれる. 有効ラグランジアンの方法では, 低エネルギーの自由度として NG 場 π^a を導入し, ラグランジアンはこの自由度の微分展開で記述されると仮定する. そうすると微分に関して 2 次, 場についても 2 次までで一般に,

$$\mathcal{L} = \rho_{ab}\pi^a\dot{\pi}^b + \frac{1}{2}\bar{g}_{ab}\dot{\pi}^a\dot{\pi}^b - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla\pi^a\nabla\pi^b + \dots \quad (114)$$

と書ける. 振り子の例では, 時間の 1 階微分項が重要な役割を担った. それに対応する係数 ρ_{ab} がどのような値を取るだろうか? 渡辺-村山の論文では, この理論の対称性のネーター電荷を構成し, ネーター電荷の係数を比べることで, $\rho_{ab} \propto \langle [iQ_a, j_b^0] \rangle$ と書けることが示された [12]. 次節で有効ラグランジアンを構成してこれを見つめてみる.

3.5 有効ラグランジアンの方法

ここでは、Calan-Coleman-Wess-Zumino の有効ラグランジアンの方法を紹介しよう [21, 22] . これは、対称性が自発的に破れた場合の低エネルギーの有効理論として一般的な手法である (この手法の詳細は、例えば [6, 23] を参照) . 大域的対称性を G とし G がその部分群 H に自発的に破れた場合を考えよう . 対称性はすべて内部対称性で半単純群とする . G の生成子を T_a , H の生成子を S_a , 破れた生成子を X_a とする . NG 場を $\pi^a(x)$ とし $\xi(\pi) = e^{iX_a\pi^a(x)}$ を考える . 一般に任意の G の元は、 $h(\theta) = e^{iS_a\theta^a}$, $\xi(\pi) = e^{iX_a\pi^a}$ とし、ある π^a, θ^a を用いて、 $\xi(\pi)h(\theta)$ と分解できる . さらに $\xi(\pi)$ の左から G の元 g をかけると、 $g\xi(\pi)$ となるが、これも G の元であるので、 $g\xi(\pi) = \xi(\pi'(g, \pi))h(\theta(g, \pi))$ と分解できる . 一般に、 π', θ は π 及び g に依存する . この変換を用いて、 $\xi(\pi)$ の場の G による変換を

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = g\xi(\pi)h^{-1}(g, \pi) \quad (115)$$

と定義する . G の破れた元のもとで π は非線形に変換するので非線形表現と呼ばれる . 破れていない対称性の元 $h \in H$ では、 $\xi(\pi') = h\xi(\pi)h^{-1} = \xi(h\pi h^{-1})$ となり、 π は線形に変換する . 次に Maurer-Cartan 1 形式を

$$\alpha := -i\xi^{-1}(\pi)d\xi(\pi) = -i\xi^{-1}(\pi)\partial_\mu\xi(\pi)dx^\mu = \alpha_\mu dx^\mu \quad (116)$$

と定義する . 具体的に展開すると、

$$\alpha_\mu = \partial_\mu\pi^a X_a - i\frac{1}{2}[X_a, X_b]\pi^a\partial_\mu\pi^b + \dots \quad (117)$$

となる . $[X_a, X_b]$ は一般に、 S_a を含むので、 α_μ は、 S_a に比例した項と X_a に比例した項を両方含む . そこで α_μ を

$$\alpha_\mu = \alpha_{\mu\parallel} + \alpha_{\mu\perp} \quad (118)$$

と分解しよう . ここで

$$\alpha_{\mu\parallel} := g^{ab} S_a \text{tr} \alpha_\mu S_b, \quad (119)$$

$$\alpha_{\mu\perp} := g^{ab} X_a \text{tr} \alpha_\mu X_b \quad (120)$$

とした . g^{ab} は $g_{ab} := \text{tr}[T_a T_b]$ の逆行列で $g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a$ を満たす . 群の変換の元で、 α_μ は、

$$\alpha_\mu \rightarrow h\alpha_\mu h^{-1} - ih\partial_\mu h^{-1} \quad (121)$$

と変換するが、 $\alpha_{\mu\parallel}$ および $\alpha_{\mu\perp}$ はそれぞれ

$$\alpha_{\mu\parallel} \rightarrow h\alpha_{\mu\parallel} h^{-1} - ih\partial_\mu h^{-1}, \quad (122)$$

$$\alpha_{\mu\perp} \rightarrow h\alpha_{\mu\perp} h^{-1} \quad (123)$$

と変換する . この $\alpha_{\mu\parallel}$ 及び $\alpha_{\mu\perp}$ を用いて G 不変なラグランジアンを構成したい . 一般に、 α_μ は可約で、既約な $\alpha_\mu^{(i)}$ のセクターに分解できる . $\text{tr} \alpha_{\mu\perp}^{(i)2}$ は群の変換に対して不変であるので、有効ラグ

ランジアンの微分展開の最低次は (Lorentz 不変性を仮定すると) ,

$$\mathcal{L}^{(2)} = - \sum_{i=1}^n (f_\pi^{(i)})^2 \text{tr}(\alpha_{\perp\mu}^{(i)})^2 \quad (124)$$

と書ける．これが NG モードの有効理論である．微分の高次項も G の元で不変なように構成することができる (例えば $\text{tr} \alpha_{\perp\mu} \alpha_{\perp\nu} \alpha_{\perp\mu}^\mu \alpha_{\perp\nu}^\nu$ など) . (117) 式を用いて ξ を展開し, (124) 式から分散関係を求めると, $\omega = |k|$ が得られる．このモードは Type-A である．以下簡単のため, 既約なセクターはひとつとして (i) の添字を取る．非相対論的な系では, 時間と空間の係数が別々でも良い:

$$\mathcal{L}^{(2)} = f_{\pi t}^2 \text{tr} \alpha_{0\perp}^2 - f_{\pi s}^2 \text{tr} \alpha_{i\perp}^2. \quad (125)$$

さらに時間微分に対して 1 次の項が存在しても良い [24, 12] . この定式化では, どのような 1 次の項が可能であろうか? まず, $\text{tr} \alpha_{0\perp}$ や $\text{tr} \alpha_{0\parallel}$ は $\text{tr} S_a = 0, \text{tr} X_a = 0$ となる生成子に関して消える. 従って, Maurer-Cartan 1 形式で作ることが出来たとすると, 候補となるのは, $\text{tr} \alpha_{0\perp} X_a$ と $\text{tr} \alpha_{0\parallel} S_a$ である．これらは, 対称性の変換で,

$$\text{tr} \alpha_{0\perp} X_a \rightarrow \text{tr} \alpha_{0\perp} h^{-1} X_a h, \quad (126)$$

$$\text{tr} \alpha_{0\parallel} S_a \rightarrow \text{tr} \alpha_{0\parallel} h^{-1} S_a h - i \text{tr} S_a h \partial_0 h^{-1} \quad (127)$$

と変換する．(126) 式については, すべての S_b に対して $[S_b, X_a] = 0$ となる X_a , つまり, 破れていない対称性変換に対して, 1 重項となる生成子ならば, $\text{tr} \alpha_{0\perp} X_a$ は可能な項になる．同様に, (127) 式については, すべての S_a に対して $[S_a, S_b] = 0$ となる S_b が必要である．この場合, 破れていない可換な対称性を含むことになる．その生成子を $S_{\bar{a}}$ としよう．すると,

$$-i \text{tr} S_{\bar{a}} h \partial_0 h^{-1} = -2 \partial_0 \theta_{\bar{a}} \quad (128)$$

となる．従って, $\text{tr} \alpha_{0\parallel} S_{\bar{a}}$ は時間一階微分項として可能だが, 対称性変換の元で全微分項だけ変化する．

$SU(2) \times U(1)$ 模型は前者の例になっている．破れた生成子を $X_a = T_1, T_2, T'_3 = (T_3 - T_0)/\sqrt{2}$, 破れてない生成子を $T'_0 = (T_0 + T_3)/\sqrt{2}$ とする． $\xi = e^{i\pi^a X_a}$ として, Maurer-Cartan 1 形式は $\alpha_\mu = -i\xi^{-1} \partial_\mu \xi$, $\alpha_{\mu\perp} = 2 \sum_a X_a \text{tr} \alpha_\mu X_a$ となる．有効ラグランジアン密度は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -f_\pi^2 \text{tr} \alpha_{\mu\perp}^2 - 4\sqrt{2}\mu f_\pi^2 \text{tr} \alpha_{0\perp} T'^3 + \dots \\ &= -f_\pi^2 \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^a)^2 - \mu f_\pi^2 \epsilon_{ab} \pi^a \partial_0 \pi^b + \dots \end{aligned} \quad (129)$$

と書ける [9] .

強磁性体の模型では, 破れた生成子は $X_a = T_1, T_2$ で, 破れていない生成子は $S = T_3$ である． $\xi = e^{i\pi^a X_a}$ として, Maurer-Cartan 1 形式は $\alpha_\mu = -i\xi^{-1} \partial_\mu \xi$ と書ける．さらに分解すると $\alpha_{\perp\mu} = 2X_a \text{tr} \alpha_\mu X_a$, $\alpha_{\parallel\mu} = 2T_3 \text{tr} \alpha_\mu T_3$ となる．有効ラグランジアンは,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -2M_0 \text{tr} \alpha_{\parallel 0} T_3 - \rho_{\text{ferro}} \text{tr} \alpha_{\perp i}^2 \\ &= -\frac{M_0}{2} \epsilon_{ab} \pi^a \partial_0 \pi^b - \frac{\rho_{\text{ferro}}}{2} (\partial_i \pi^a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (130)$$

と書ける．

さて，時間 1 微分の項の存在が，Type-B の存在と等価であることを見てみよう [12]．上では，ユニタリー行列 ξ を用いて定式化した，より一般に，ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = c_a(\pi)\partial_0\pi^a + \frac{1}{2}\bar{g}_{ab}(\pi)\partial_0\pi^a\partial_0\pi^b - \frac{g_{ab}(\pi)}{2}(\nabla\pi^a)\cdot(\nabla\pi^b) + \dots \quad (131)$$

の形に書くことができる．作用は，群の微小変換 $\delta\pi^a = \theta^i h_i^a(\pi)$ で作用は不変である．このラグランジアンから Noether カレントを求め，Type-B の条件 $\langle [iQ_a, Q_b] \rangle \neq 0$ とラグランジアンの時間 1 階微分項 $\mathcal{L}_{(1)} = c_a(\pi)\partial_0\pi^a$ の関係を求めたい．そこで $\mathcal{L}_{(1)} = c_a(\pi)\partial_0\pi^a$ に注目し，Noether current を求めてみよう．群の微小変換のパラメータ θ^i を座標依存させて，場の変換を施すとラグランジアンの変化は，

$$\delta\mathcal{L}_{(1)} = \theta^i(\partial_a c_b h_i^a + c_a \partial_b h_i^a)\partial_0\pi^b + c_a h_i^a \partial_0\theta^i \quad (132)$$

となる．ここで， $\partial_a := \partial/\partial\pi^a$ を定義した．作用の不変性から $\theta = \text{const}$ の時にはせいぜい全微分でなければならないので，

$$(\partial_a c_b h_i^a + c_a \partial_b h_i^a)\partial_0\pi^b = \partial_0(e_i + c_a h_i^a) = (\partial_b e_i + \partial_b c_a h_i^a + c_a \partial_b h_i^a)\partial_0\pi^b \quad (133)$$

の形を取る．つまり，

$$(\partial_a c_b - \partial_b c_a)h_i^a = \partial_b e_i \quad (134)$$

を満たす．従って，

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{(1)} &= \theta^i \partial_0(e_i + c_a h_i^a) + c_a h_i^a \partial_0\theta^i \\ &= \partial_0(\theta^i(e_i + c_a h_i^a)) - \partial_0\theta^i e_i \end{aligned} \quad (135)$$

となる．Noether の定理 (Appendix B 節参照) から，電荷密度を読み取ることができる：

$$j_i^0 = e_i. \quad (136)$$

この電荷密度を用いて，電荷と電荷密度の交換関係の期待値は，

$$\rho_{ij} := -\langle [iQ_i, j_j^0] \rangle = h_i^c \partial_c j_j^0|_{\pi=0} = h_i^c \partial_c e_j|_{\pi=0} = h_i^c h_j^b (\partial_b c_c - \partial_c c_b)|_{\pi=0} \quad (137)$$

と書ける．ここで，真中の式で，(134) 式を用いた．ラグランジアンの π の 2 次の項を見るために $c_a(\pi)$ を π についてべき展開すると，

$$c_a(\pi) = c_a(0) + (S_{ab} + A_{ab})\pi^b + \dots \quad (138)$$

となる．ここで， S_{ab} ， A_{ab} は a, b に対して，対称及び反対称部分である．これより，ラグランジアンの時間の 1 次の項は，

$$\mathcal{L}_{(1)} = A_{ab}\pi^b \partial_0\pi^a + \dots \quad (139)$$

と書ける．また，電荷と電荷密度の交換関係の期待値は， $\rho_{ij} = 2h_i^a(0)h_j^b(0)A_{ab}$ となる．従って，時間の 1 階微分で π の 2 次の項は， $\langle [iQ_i, j_j^0] \rangle$ で決まっている事がわかる．ラグランジアンは空間微分項から始まっているので，運動方程式では，時間の 1 階微分項に対して空間の 2 階微分項が釣り合う．従って Type-B NG モードは 2 乗分散となる．ここでは，ラグランジアン密度について時間に対して 1 階微分の項だけを考えたが，時間の高階微分項を入れてもこの結果は変わらない．

3.6 高次対称性の破れ

0 次対称性の破れと同じ様に，高次対称性の自発的破れを考えることができる [1, 25, 26]．0 次対称性の自発的破れの秩序変数は (29) 式であった．これは，高次対称性の破れでは，

$$\lim_{C^p \rightarrow \infty} \langle U_g(\mathcal{M}^{d-p}) \tilde{W}(C^p) \rangle = e^{i\theta} \lim_{C^p \rightarrow \infty} \langle \tilde{W}(C^p) \rangle \neq 0 \quad (140)$$

と拡張される．ここで， θ は対称性変換の位相で， $C^p \rightarrow \infty$ は， C^p の面積の大きい極限を表す． $\tilde{W}(C^p) := A(C^p)W(C^p)$ は，くりこまれた荷電演算子である． $W(C^p)$ は p 次元的に広がった境界のない多様体上 C^p の演算子で， $A(C^p)$ 演算子ではなく C^p に依存した関数である．別の言い方をすると対称性が破れていない相は， $\langle W(C^p) \rangle$ の “Area 則” で特徴づけられ，対称性が破れた相は “perimeter 則” で特徴づけられる．つまり対称性が破れた相では， $\langle W(C^p) \rangle = e^{-f(C^p)}$ と振る舞う．ここで $f(C^p)$ は C^p が大きい極限で C^p の面積に比例する量である．そこで， $A(C^p) = e^{+f(C^p)}$ にとれば， $\langle \tilde{W}(C^p) \rangle$ は C^p が大きいところで一定になり秩序変数とみなせる．一方 Area 則の場合は，どんな C^p 上で定義された関数 $A(C^p)$ を用いても $\lim_{C^p \rightarrow \infty} \langle \tilde{W}(C^p) \rangle$ をゼロでない定数にすることはできない．この状態は，非対角長距離秩序に対応すると考えることもできる．通常非対角長距離秩序は $\langle \phi(x)\phi(0) \rangle$ が x の大きいところで定数になる．

3.6.1 南部-Goldstone モードとしての光子

真空中の光子はギャップレスモードである．光子も NG モードとみなすことは可能だろうか？光子が NG モードであるという解釈はゲージ固定した理論 [27, 28, 29, 30] においてなされたが，最近の進展では，1 次対称性の自発的破れを用いてゲージ不変な枠組みでギャップレスな光子の存在を示すことができるようになった [1]．2.2 節で，Wilson loop が電氣的 $U(1)$ -1 次対称性の荷電演算子であるのを見た． $(3+1)$ 次元 $U(1)$ ゲージ理論では，くりこまれた Wilson loop の期待値が，大きな面積で有限であり $U(1)$ -1 次対称性が自発的に破れている．同様に磁氣的 $U(1)$ -1 次対称性も破れている．従って光子は $U(1)$ -1 次対称性の自発的破れにともなう NG モードと見る事ができる [1]．0 次対称性の場合と同様に高次対称性の破れでも NG モードは電荷密度と結合する．行列要素は Lorentz 対称性より

$$\langle \zeta, k | F_{\mu\nu} | 0 \rangle = (k_\mu \zeta_\nu - k_\nu \zeta_\mu) e^{ik \cdot x} \quad (141)$$

の形を持つ．ここで， ζ_μ は，偏極ベクトルである． ζ_μ のうち k_μ に比例した項は，(141) に寄与しない．さらに，保存則 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ より， $k^2 \zeta_\mu - (\zeta \cdot k) k_\mu = 0$ が成り立つ． ζ_μ と k_μ は線形独立で

あるので、 $k^2 = 0$ および $\zeta \cdot k = 0$ が導かれる。従って、これらの関係は、2つの偏極ベクトルが独立で、質量がゼロ $k^2 = 0$ のモードの存在を意味する。対称性の生成子を用いた NG モードの数の議論は、通常対称性の対応と比べてそれほど自明ではない。電氣的、磁氣的対称性がそれぞれ xy, yz, zx 平面で定義できるので、6つの独立な電荷密度が存在すると考える事ができる。これらは、 $\tilde{j}_E^{0i} := -\epsilon^{0i\mu\nu} j_{E\mu\nu}/2 = E^i/e$ および $\tilde{j}_M^{0i} := -\epsilon^{0i\mu\nu} j_{M\mu\nu}/2 = eB^i/(2\pi)$ である。しかしながら、 \tilde{j}_E^{0i} と \tilde{j}_M^{0j} は交換関係がゼロではないので独立ではない¹¹:

$$[\tilde{j}_M^{0i}(\mathbf{x}), \tilde{j}_E^{0j}(\mathbf{y})] = \frac{1}{2\pi} [B^i(\mathbf{x}), E^j(\mathbf{y})] = \frac{1}{2\pi} i\epsilon^{ijk} \nabla_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (142)$$

これは、 i, j を脚とした行列のランクから2つの拘束を与えることがわかる。加えて、 $\nabla_i \tilde{J}_M^{0i} = e \nabla \cdot \mathbf{B}/(2\pi) = 0$ および $\nabla_i \tilde{J}_E^{0i} = \nabla \cdot \mathbf{E}/e = 0$ は、それぞれ1つずつ拘束を与える。従って、NG モードの数は、 $6 - 2 - 1 - 1 = 2$ となる。

光子が NG モードであるという解釈は、非可換ゲージ理論においてギャップレスモードが現れない事実を自然に解釈することができる。非可換ゲージ理論、例えば $SU(N)$ ゲージ理論では、1次対称性は \mathbb{Z}_N の可換有限群であり、連続群の高次対称性を持たない。従って連続1次対称性の自発的破れにともなう NG モードも出てこないためギャップレスなベクトル粒子はないと理解できる。

3.6.2 Type-B 光子

0次対称性の自発的破れでは、Type-A、Type-Bの2種類の NG モードが存在することを見た。高次対称性の自発的破れでも Type-B モードは存在するだろうか？答えは Yes である。Type-B のメカニズムは、高次対称性についても成り立つ。

興味深い例は、アクシオン項を持った $U(1)$ ゲージ理論である [31, 32]。この理論では、アクシオン場が特別な配位を持つ時 Type-B 光子が現れる。ここでは、以下の作用を考える:

$$S = -\frac{1}{2e^2} \int F \wedge *F - \frac{1}{8\pi^2} \int \theta F \wedge F. \quad (143)$$

ここで、 θ はアクシオン場で、議論に影響しない運動項は無視した。この理論は、電氣的、磁氣的1次 $U(1)$ 対称性があり、カレントは、

$$j_M = \frac{1}{2\pi} F, \quad j_E = \frac{1}{e^2} *F + \frac{\theta}{4\pi^2} F \quad (144)$$

となる。磁氣的対称性は Bianchi 恒等式で閉じ、電氣的対称性は運動方程式で閉じる。同時刻交換関係は、 $\tilde{j}_{E/M}^{\mu\nu} := -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} j_{E/M\rho\sigma}/2$ より、

$$[\tilde{j}_M^{0i}(t, \mathbf{x}), \tilde{j}_M^{0j}(t, \mathbf{y})] = 0, \quad (145)$$

$$[\tilde{j}_M^{0i}(t, \mathbf{x}), \tilde{j}_E^{0j}(t, \mathbf{y})] = \frac{1}{2\pi} i\epsilon^{ijk} \nabla_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (146)$$

$$[\tilde{j}_E^{0i}(t, \mathbf{x}), \tilde{j}_E^{0j}(t, \mathbf{y})] = \frac{i}{4\pi^2} (\theta(x) - \theta(y)) \epsilon^{ijk} \nabla_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (147)$$

¹¹この事実は、高次対称性のアノマリーと関係する。

となる．アキシオン場が存在することで， $\tilde{j}_E^{0i}(t, x)$ と $\tilde{j}_E^{0j}(t, x')$ の間に非自明な交換関係が存在している．この交換関係より， x を積分することで

$$-i\langle [Q_E^i, \tilde{j}_E^{0j}(y)] \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \langle \nabla_k \theta(y) \rangle \epsilon^{ijk} \delta^{(1)}(x^i - y^i). \quad (148)$$

が導かれる．ここで，なんらかのメカニズムによってアキシオン場がドメインウォールタイプの古典的な配位を持っているとしよう．従って，もし $\langle \nabla_k \theta \rangle \neq 0$ ならば，この光子は Type-B モードとなる．右巻き左巻きのヘリシティを持った状態が結合して，1つのモードを形成する．アキシオン場の配位は，並進対称性を破るので分散関係は場の配位に依存する．特別な配位として，並進対称性を破らない $\langle \nabla_z \theta(y) \rangle = \text{const}$ を採用すると， z 方向に伝搬する光子は2乗分散したものになる．0次対称性の場合と同様に，低エネルギー有効理論では，Type-B モードの存在は，有効場の理論の時間に関して1階微分項に対応する．これを見るには，アキシオン項を部分積分してみれば良い：

$$\int \theta dA \wedge dA = - \int d\theta \wedge A \wedge dA. \quad (149)$$

$d\theta$ が古典的配位を持つことで，時間の1階微分項が現れていることがわかる．

他の例としては，フェルミオンが質量項を持たない QCD+QED 系の一定磁場中において中性パイ中間子が光子と混ざることによって Type-B モードが現れることが知られている [33].

3.6.3 高次対称性についての Coleman-Mermin-Wargner の定理

連続対称性は $(1 + 1)$ 次元以下では自発的に破れることができない．これは Coleman-Mermin-Wargner の定理として知られている [34, 35]．これを高次対称性についても拡張することができる [1, 26]．ここでは，証明は抜きにして定理の主張を記載しておこう．

$(d + 1)$ 次元時空で，連続的 p 次対称性は，もし $p \geq d - 1$ ならば自発的に破れない．

例 3) 1 形式対称性は， $d \leq 3$ では破れない．つまり，ギャップレスなベクトル的な光子は $d \leq 3$ では存在できない．

3.6.4 トポロジカル欠陥がある時の Type-B モード

ここでは，分域壁 (domain wall) や渦糸 (vortex string) などのトポロジカル欠陥がある場合に現れる特殊な Type-B モードについて議論しよう．例えば分域壁の場合，分域壁が並進対称性を破り，その NG モードとして壁に局在したモードが現れる．並進対称性と同時に別の対称性が破れた場合，複数の NG モードが現れる可能性があるが，その NG モードが並進の NG モードと混ざり Type-B モードを形成する可能性がある．以下ではこのような混ざりが起きる例を見てみよう．

例 3 Type-B 表面波

トポロジカル欠陥の例として， $(3 + 1)$ 次元の非相対論的で，質量項を持つ CP^1 模型を考える．ラグランジアンとして以下のもの考える [36]:

$$\mathcal{L} = \frac{|\partial_0 u|^2}{c^2(1 + |u|^2)^2} + \frac{iM(u^* \partial_0 u - \partial_0 u^* u)}{(1 + |u|^2)} - \frac{|\nabla u|^2 + m^2 |u|^2}{(1 + |u|^2)^2}. \quad (150)$$

ここで, u は CP^1 の場で, c, M は光速及び磁化に対応するパラメータである. $c \rightarrow \infty$ の極限でこの模型は $O(3)$ Heisenberg 模型に帰着する. この作用は, $\mathbb{Z}_2 : u \rightarrow 1/u^*$ および $U(1) : u \rightarrow e^{i\alpha}u$ の元で不変である. 古典的な運動方程式の解として分域壁解が存在する: $u_0 = \exp[m(z - Z) + i\alpha]$. ここで, Z, α は解のパラメータである. この解は, $U(1)$ 対称性及び z 軸方向の並進対称性, 回転対称性を破る. 並進と回転が同時に破れている場合は, 回転の NG モードは出ないことが知られているので [37], 出てくる NG モードは $U(1)$ と並進の破れに伴うものである. 分域壁は, 完全に z 方向の並進対称性を破っているので, NG モードは z 方向には伝搬せず, 分域壁上に局在し x, y 方向のみ伝搬する. NG モードを見るには, ゆらぎを見てみれば良い. ゆらぎの運動方程式は, 場を $u = \exp[m(z - Z(t, \mathbf{x}_\perp)) + i\alpha(t, \mathbf{x}_\perp)]$ とパラメトライズして, 線形の範囲で

$$\frac{m}{c^2} \partial_0^2 Z = 2M \partial_0 \alpha + m \nabla_\perp^2 Z, \quad \frac{1}{mc^2} \partial_0^2 \alpha = -2M \partial_0 Z + \frac{1}{m} \nabla_\perp^2 \alpha \quad (151)$$

となる. ここで, Z と α は並進及び $U(1)$ 対称性の自発的破れに伴う NG 場である. $\nabla_\perp = (\partial_x, \partial_y)$ とした. もし $M = 0$ ならば 2 つの NG モードが現れ, それらの分散関係は $\omega = c|k_\perp|$ の線形が得られる. 一方もし, $M \neq 0$ ならば, 並進と $U(1)$ の間に混ざりが起き, 1 つの NG モードが現れる. 分散関係は, 小さい k_\perp に対して $\omega = |k_\perp|^2/(2M)$ となる. この 2 乗分散を持ったモードは, Type-B モードである. Type-B モードであることを確かめるために分域壁が持つ電荷を見てみよう. この分域壁は, Ising 模型に現れる分域壁のように 2 つ重ねると消すことができ, また $(3+1)$ 次元中の 2 次元物体であるので対応する対称性は, 2 次 \mathbb{Z}_2 対称性である. その電荷は 1 形式で $w_\mu = \partial_\mu(|u|^2/(1+|u|^2))$ として $w = w_\mu dx^\mu$ を導入して,

$$W = \int_{\mathcal{M}^{(1)}} w \quad (152)$$

と書ける. もし $\mathcal{M}^{(1)}$ を直線に選べば 3 つの方向が存在する. これらを独立な電荷とすることにする. W^i を $\mathcal{M}^{(1)}$ が i 軸方向に沿った直線の電荷とする. そうすると, この分域壁の電荷の期待値は, $\langle W^z \rangle$ が有限で他の期待値はゼロになる:

$$\langle W^z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z \frac{|u_0|^2}{(1+|u_0|^2)} = \left[\frac{|u_0|^2}{1+|u_0|^2} \right]_{z=-\infty}^{z=\infty} = 1. \quad (153)$$

この分域壁の電荷の期待値と Type-B モードの関係を見てみよう. そのために, 並進 P_i と $U(1)$ 対称性の電荷と電荷密度の交換関係を考える. これらは, $-i[Q, u(x)] = iu(x)$ と $-i[P_i, u(x)] = \partial_i u(x)$ より,

$$-i[P_i, j^0(x)] = \partial_i j^0(x), \quad [Q, T_i^0(x)] = 0 \quad (154)$$

となる. $U(1)$ 電荷は Noether の定理 (Appendix B 節参照) より陽に計算でき,

$$j^0 = \frac{i u^* \partial_0 u - i u \partial_0 u^*}{c^2(1+|u|^2)^2} + \frac{2M|u|^2}{1+|u|^2} \quad (155)$$

となる. この電荷密度の表式から,

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle [iP_z, j^0(x)] \rangle = 2M \langle W^z \rangle \quad (156)$$

がわかる．従って， $M\langle W^z \rangle$ が有限であるかどうかで，Type-B NG モードの存在が決まることになるが，これは上の解析と一致している．

4 対称性の量子的破れと異常輸送現象

ここでは，対称性の量子的破れ (アノマリー) について解説する．アノマリーは大きく分けて2種類に分けられる．一つは，古典作用が持っていた対称性が量子論で破れてしまい，量子論の対称性ではなくなる場合である．典型的な例は，量子色力学 (QCD) における $U(1)_A$ 対称性のアノマリーである． $(3+1)$ 次元時空上の質量のないフェルミオンの作用は，右巻き ψ_R と左巻き ψ_L の2種類から成り，それぞれの位相を同じ方向に回す変換と $U(1)_V: \psi_{R/L} \rightarrow e^{i\theta_V} \psi_{R/L}$ と逆向きに回す変換 $U(1)_A: \psi_R \rightarrow e^{i\theta_A} \psi_R, \psi_L \rightarrow e^{-i\theta_A} \psi_L$ の元で不変である．それらに対応して古典的には2つの Noether カレント j_V^μ, j_A^μ があるが，量子化すると j_A^μ は保存しない ($U(1)_A$ アノマリー)．もし j_A^μ がゲージ対称性のカレントであれば，これは，理論のゲージ不変性を破ることになりゲージ理論の量子論としては成り立たなくなる．素粒子の標準模型は絶妙にアノマリーがキャンセルするように構成されている．

もう一つのアノマリーは，量子論としての大域対称性であるが，対称性を背景ゲージ場に結合させると保存しなくなるアノマリーである．特に破れがダイナミカルな場には依存せず背景場のみによる場合，'t Hooft アノマリーと呼ばれる．理論を対称性の背景ゲージ場と結合させる事を以下では単に“ゲージ化”と言うことにする¹²．'t Hooft アノマリー自体は大きな問題を引き起こすものではなく，むしろ有用なアノマリーである．もし UV の理論が't Hooft アノマリーを持っている場合，IR の有効理論も't Hooft アノマリーを持つ必要がある (アノマリー一致条件)，有効理論の相互作用に制限を与えることができる．また，もし UV の理論にアノマリーがあれば，IR の理論はギャップを持った縮退のない基底状態にはならない．そのような基底状態には対称性が自明にしか作用できずアノマリーが再現できないのでなんらかの意味 (自発的破れ，トポロジカル秩序など) で縮退が必要となる．質量のない2のフレーバー (アップクォーク，ダウンクォーク) を持つ QCD は，大域的対称性としてカイラル対称性 $SU(2)_R \times SU(2)_L$ を持つ．この QCD の対称性に電磁場を背景場として結合させると't Hooft アノマリーを持つことが知られている．QCD の真空はカイラル対称性が自発的に破れており，低エネルギーの有効理論は NG モードの場で記述される．この低エネルギーの有効理論は，カイラルアノマリーを再現するために電磁場と中性パイ中間子の特別な結合が必要となる．ここから予言されるパイ中間子の崩壊率は，実験結果を非常によく再現しておりアノマリーの有用性を表している．

逆に UV の理論のある対称性にアノマリーがない場合は IR の理論にもその対称性のアノマリーはない¹³．しかしながら IR の理論の一部を切り取ってきた時にアノマリーを持つ場合がある．この例が 5.1 節で見る“対称性で守られたトポロジカル (SPT) 相”である．SPT 相では，境界がある場合

¹² ゲージ化と呼ぶと背景ゲージ場に結合しただけなのか，ゲージ場をダイナミカルにしてゲージ理論にしたものなのか区別がつかなくなるが，本稿ではダイナミカルにはしないので背景ゲージ場との結合をゲージ化と単に呼ぶことにする．

¹³ UV の理論が格子模型の場合，格子の並進が低エネルギーの有効理論で内部対称性に見える場合がある．そのような場合の低エネルギーの有効理論にはアノマリーがある場合がある．他にも低エネルギーの有効理論で対称性が創発し，その対称性がアノマリーを持つ場合がある．

に、境界の理論だけを取り出すとアノマリーを持つが、このアノマリーは、バルクの理論が持つトポロジカルな位相とキャンセルして全体としてはアノマリーを持たない。

この節では、アノマリーが現れる簡単な例を見ていき、応用例としてアノマリーに関係した輸送現象であるカイラル磁気効果について紹介したい [38, 39] .

4.1 量子力学に現れるアノマリー

ここでは、 $(0+1)$ 次元場の理論 = 量子力学に現れるアノマリーを見てみよう [40] . フェルミオンの (虚時間での) 作用を

$$S = \int d\tau \psi^\dagger \partial_\tau \psi \quad (157)$$

とする . この系のハミルトニアンはゼロである . 古典的には、場は半交換する $\{\psi, \psi^\dagger\} = \psi\psi^\dagger + \psi^\dagger\psi = 0$. このラグランジアンは、 $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow e^{-i\theta}\psi^\dagger$ の $U(1)$ 対称性、 $\psi \rightarrow \psi^\dagger$, $\psi^\dagger \rightarrow \psi$ の荷電共役対称性の元で不変である . $U(1)$ 対称性に対応した電荷は、 $Q = \psi^\dagger\psi$ である . この系の基底は $|0\rangle$, $|1\rangle$ の2つで、 Q の元で $Q|0\rangle = 0$, $Q|1\rangle = |1\rangle$ となる . さて $U(1)$ 対称性のゲージ場 $A_\tau(\tau)$ を導入してゲージ化しよう . 作用は、

$$S[A_\tau] = \int d\tau \psi^\dagger (\partial_\tau - iA_\tau) \psi \quad (158)$$

と修正され、 $U(1)$ 対称性は A_τ の変換も含めることでゲージ対称性に昇格する . つまり作用は $\psi(\tau) \rightarrow e^{i\theta(\tau)}\psi(\tau)$, $A_\tau(\tau) \rightarrow A_\tau(\tau) + \partial_\tau\theta(\tau)$ の元で不変である . また、作用は荷電共役 $\psi(\tau) \rightarrow \psi^\dagger(\tau)$, $\psi^\dagger(\tau) \rightarrow \psi(\tau)$, $A_\tau(\tau) \rightarrow -A_\tau(\tau)$ の元でも不変である . これら2種類の変換を保つ量子論は作れるだろうか? それを見るために以下で定義された分配関数を考える:

$$Z[A_\tau] := \int \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi e^{-S[A_\tau]} = \text{tr} T_\tau e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau Q}. \quad (159)$$

ここで T_τ は虚時間順序積、 β は虚時間の周期で、経路積分においては $\psi(\beta) = -\psi(0)$ の半周期境界条件を課すものとする . もし古典的な対称性が保たれているのであれば、 $A_\tau \rightarrow A_\tau + \partial_\tau\theta(\tau)$ 及び、 $A_\tau \rightarrow -A_\tau$ の元で $Z[A_\tau]$ は不変になるはずである .

この分配関数は具体的に計算できて、

$$Z[A_\tau] = \langle 0 | T_\tau e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau Q} | 0 \rangle + \langle 1 | T_\tau e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau Q} | 1 \rangle = 1 + e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau} \quad (160)$$

となる . これを見ると分配関数が $A_\tau \rightarrow A_\tau + \partial_\tau\theta$ の元で不変 (ゲージ不変) であることがわかる . 一方、荷電共役変換 $A_\tau \rightarrow -A_\tau$ の元では、

$$Z[A_\tau] \rightarrow Z[-A_\tau] = 1 + e^{-i \int_0^\beta d\tau A_\tau} \neq Z[A_\tau] \quad (161)$$

と変換し分配関数は不変ではない . 従って $U(1)$ 対称性と荷電共役対称性の間にアノマリーがあること示唆する . しかしながらまだ演算子のうまい再定義によって、対称性を保つように修正できる可能

性が残っている．例えば，荷電共役変換を保つように，電荷の定義 $Q = \psi^\dagger \psi$ を $\psi^\dagger \psi - 1/2$ と修正して分配関数を計算してみよう：

$$\tilde{Z}[A_\tau] = \text{tr} T_\tau e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau (\psi^\dagger \psi - 1/2)} = e^{-\frac{i}{2} \int_0^\beta d\tau A_\tau} + e^{\frac{i}{2} \int_0^\beta d\tau A_\tau}. \quad (162)$$

確かに荷電共役変換の元で分配関数は不変になっている．しかし今度は $U(1)$ ゲージ変換の元で，

$$\tilde{Z}[A_\tau + \partial_\tau \theta] = e^{-\frac{i}{2} \int_0^\beta d\tau (A_\tau + \partial_\tau \theta)} (1 + e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau + \partial_\tau \theta}) \quad (163)$$

となる． $\int_0^\beta d\tau \partial_\tau \theta(\tau) = \theta(\beta) - \theta(0)$ で θ が円周上で，一価関数 ($\theta(\beta) = \theta(0)$) であればゼロとなり分配関数はゲージ不変である．しかしながら，ゲージ変換は $e^{i\theta(\tau)}$ が一価であることを要請するが $\theta(\tau)$ 自身は一価である必要はない．つまり $\theta(\beta) = \theta(0) + 2\pi n$ (n は整数) であっても良い (ラージゲージ変換)．この変換の元で (163) 式は，

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[A_\tau + \partial_\tau \theta] &= e^{-\frac{i}{2} \int_0^\beta d\tau (A_\tau + \partial_\tau \theta)} (1 + e^{i \int_0^\beta d\tau A_\tau + \partial_\tau \theta}) \\ &= e^{-\frac{i}{2} 2\pi n} \tilde{Z}[A_\tau] \neq \tilde{Z}[A_\tau] \end{aligned} \quad (164)$$

となり n が奇数の時には不変ではない．つまり $U(1)$ 対称性と荷電共役対称性を同時にゲージ化することはできないのである．アノマリーとはどのようにうまい演算子のとり方をしても対称性を保つようにゲージ化できない現象である．このアノマリーは局所的な変換では分配関数は不変にできるが，ラージゲージ変換まで考えると分配関数の不変性が破れてしまうので，グローバルアノマリーと呼ばれる．

4.2 (1 + 1) 次元カイラルアノマリーと異常輸送現象

次に，場の理論のアノマリーの例として (1 + 1) 次元，質量項を持たない Dirac フェルミオンを考える．この理論は有限密度において非自明な輸送現象を示すモデルになっている．これを見てみよう．作用は，

$$S = \int d^2x \left[\psi_R^\dagger (i\partial_0 + i\partial_z) \psi_R + \psi_L^\dagger (i\partial_0 - i\partial_z) \psi_L \right] \quad (165)$$

である．ここで ψ_R, ψ_L は，右巻き，左巻きフェルミオンと呼ばれる場である．作用は，右巻き及び左巻きフェルミオンの位相を独立に回転させる変換 $\psi_{R/L} \rightarrow e^{i\theta_{R/L}} \psi_{R/L}$ ，または， $U(1)_V$ 変換 $\psi_R \rightarrow e^{i\theta_V} \psi_R, \psi_L \rightarrow e^{i\theta_V} \psi_L$ 及び右巻きと左巻きを逆向きに変換する $U(1)_A$: $\psi_R \rightarrow e^{i\theta_A} \psi_R, \psi_L \rightarrow e^{-i\theta_A} \psi_L$ の元で不変である．従って古典的作用は $U(1)_L \times U(1)_R \simeq U(1)_V \times U(1)_A$ の対称性がある¹⁴．Noether の定理 (Appendix B 節参照) より， $U(1)_V$ 対称性のカレントは， $j_V^\mu = (\psi_R^\dagger \psi_R + \psi_L^\dagger \psi_L, \psi_R^\dagger \psi_R - \psi_L^\dagger \psi_L)$ で， $U(1)_A$ 対称性のカレントは， $j_A^\mu = (\psi_R^\dagger \psi_R - \psi_L^\dagger \psi_L, \psi_R^\dagger \psi_R + \psi_L^\dagger \psi_L)$ となる． $U(1)_V$ 対称性のカレントにゲージ場 A_μ を結合させると作用は，

$$S[A_\mu] = \int d^2x \left[\psi_R^\dagger (iD_0 + iD_z) \psi_R + \psi_L^\dagger (iD_0 - iD_z) \psi_L \right] \quad (166)$$

¹⁴ $\theta_V = \theta_A = \pi$ の元で ψ_R, ψ_L は不変に保たれるので， \mathbb{Z}_2 分だけ冗長である．従って， $U(1)_L \times U(1)_R \simeq (U(1)_V \times U(1)_A) / \mathbb{Z}_2$ と書く方が正確であるが，離散部分はここでの議論では重要な役割を担わないので特に区別はしない．

となる．ここで， $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ は共変微分である．作用は， $U(1)_A$ の変換の元で不変である．

アノマリーを見るために，まず $A_\mu = 0$ の時の真空がどのようになっているか見てみよう．まず右巻きフェルミオンを考える．運動方程式は， $(i\partial_0 + i\partial_z)\psi_R = 0$ で，解は $\psi_R = e^{-ip_z t + ip_z z}$ である． $p_z < 0$ の時，負のエネルギー解になっていて，真空は，負のエネルギーの粒子が詰まった状態になる．同様に左巻きフェルミオンも解析すると， $p_z > 0$ が負のエネルギー解となる．この真空の状態を図 2 に表した． $E < 0$ の状態には粒子が詰まっている．この真空にゲージ場を変化させて電

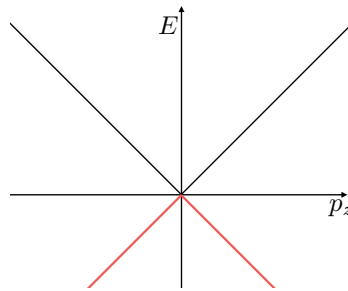


図 2: (1+1) 次元質量項を持たない Dirac フェルミオンのスペクトル

場 $eE_z = \partial_z A_0 - \partial_0 A_z$ をかけてみよう．量子論的に解いても良いが，ここでは直感的にわかりやすい古典描像を用いて解説する．電場をかけると粒子は運動方程式

$$\dot{p}_z = eE_z \quad (167)$$

に従って加速し，負エネルギーより下にあった右巻きの粒子が励起される (図 6 右)．粒子は質量ゼロなので光速で飛び出す．時刻 $t = 0$ で一定電場を時間 T まで加えたとする．すると， $t = 0$ で $p_z = 0$ だった右巻きの粒子は運動量が $p_z = eET$ まで加速される (図 3)．一方左巻きの反粒子も同様

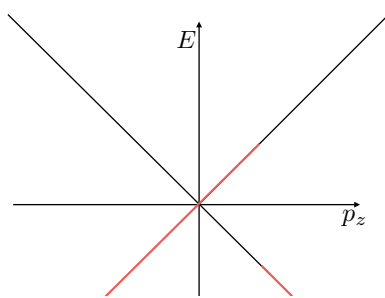


図 3: 一定電場を加えた時のスペクトル．

に加速される．結果として右巻き，左巻きの粒子数変化は，

$$\begin{aligned} \Delta Q_R &= L \int_0^{eET} \frac{dp_z}{2\pi} = L \frac{eE}{2\pi} T, \\ \Delta Q_L &= -L \int_0^{eET} \frac{dp_z}{2\pi} = -L \frac{eE}{2\pi} T \end{aligned} \quad (168)$$

と評価できる． L は空間の体積である． $U(1)_V$ の電荷数は， $\Delta Q = \Delta Q_R + \Delta Q_L = 0$ で変化しないが $U(1)_A$ の電荷は保存せず

$$\Delta Q_5 = \Delta Q_R - \Delta Q_L = LT \frac{eE}{\pi} \quad (169)$$

となる事がわかる．これは量子異常の式

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{eE}{\pi} \quad (170)$$

の外場を一定にした場合に対応する．従って， $U(1)_V$ の背景場と結合したことによって $U(1)_A$ の電荷が保存しなくなった．これはカイラル (軸性) アノマリーと呼ばれる．

次にアノマリーに関係した異常輸送を見てみよう．電場の代わりに化学ポテンシャルを入れた場合を考える．具体的に見るために右巻きのフェルミオンに注目する (図 4)．

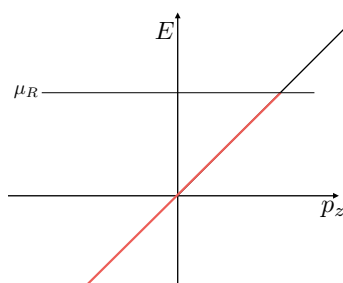


図 4: 右巻き Weyl フェルミオンの化学ポテンシャルが有限の場合．

カレントは，エネルギーが μ_R 以下の粒子の速度の和で書けるので，

$$j_R^z = \int_0^{\mu_R} \frac{dp_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \mu_R \quad (171)$$

となる．左巻きのカレントも同様に計算され， $j_L^z = -\mu_L/2\pi$ を得る． $U(1)_V$ のカレントは，これらのカレントの和なので，

$$j^z = j_R^z + j_L^z = \frac{1}{2\pi} (\mu_R - \mu_L) = \frac{1}{\pi} \mu_5 \quad (172)$$

となる．ここで $\mu_5 = (\mu_R - \mu_L)/2$ である．同様に， j_5^z は，

$$j_5^z = j_R^z - j_L^z = \frac{1}{2\pi} (\mu_R + \mu_L) = \frac{1}{\pi} \mu \quad (173)$$

となる．ここで $\mu = (\mu_R + \mu_L)/2$ である．これらがアノマリーに関係した異常輸送現象で，(1+1) 次元では，(軸性) 化学ポテンシャルが有限になるとカレントが流れる．

4.3 (3+1) 次元カイラルアノマリーと異常輸送現象

前節では，(1+1) 次元，質量項を持たないフェルミオンに現れる量子異常と異常輸送現象を紹介した．ここでは (3+1) 次元の理論を考え，同様のアノマリーと異常輸送現象を見てみよう．カイラ

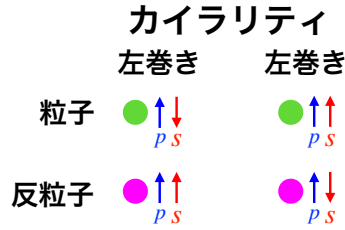


図 5: カイラリティとヘリシティの関係. p は運動量, s はスピンを表す. 運動量とスピンの向きが同じ状態は, ヘリシティが + (右巻き), 逆向きがヘリシティが - (左巻き) である.

ル量子異常に関係した輸送現象はカイラル磁気効果と呼ばれ, 磁場中の質量を持たない Dirac フェルミオンに軸性化学ポテンシャルを加えると, 磁場に沿った電流が生じるという奇妙な現象である. 以下でこれを見ていく [41, 38, 39].

4.3.1 直感的な説明

カイラル磁気効果は, 量子異常に関係した磁場と並行に非散逸カレントが流れる現象である. このようなカレントは通常パリティ対称性がある場合には流れない. なぜならカレントは空間反転に対して符号を変えるが, 磁場は空間反転に対して符号を変えないためである. 従ってカイラル磁気効果が起きるためにはパリティの破れが必要である.

カイラル磁気効果が起きる状況として, 質量ゼロの相対論的フェルミオンを考えてみよう. 質量がない場合には, 右巻きと左巻きのフェルミオンの位相を独立に回転させるカイラル対称性がある. ヘリシティが良い量子数で, 粒子のヘリシティとカイラリティは一致する (図 5). ここに磁場をかけると磁場に沿ってスピンが揃おうとする. 右巻きの粒子はスピンと運動量が揃っているので, 磁場の方向へ動く. 反粒子や左巻きの粒子反粒子についても動く向きは変わるが同様な現象が起きる. 平衡状態では, 磁場に沿って動く粒子と逆向きの粒子の数が等しく全体としては何も流れない. 一方, カイラリティにインバランスがあると動く粒子の数のインバランスが生じ結果としてカレントが生じる. これがカイラル磁気効果である. この説明は直感的で本質は捉えているが, 実際には磁場中ではヘリシティは良い量子数ではなくこの説明は厳密には正しくないので注意が必要である. 磁場がある場合には Landau 量子化が起こり, エネルギー準位が飛び飛びになり, 高い Landau 準位の状態は磁場に沿った方向に流れるカレントと逆向きのカレントが同じ割合で流れる. 一方, 最低 Landau 準位の状態は例外でカイラリティに依存して磁場に並行, 反並行のどちらか片方のみのカレントしか流れない. よって, 最低 Landau 準位の状態のみがカイラル磁気効果に寄与する.

4.3.2 カイラルアノマリーとカイラル磁気効果

4.2 節のアノマリーの議論を (3+1) 次元に拡張しよう. ここでは, 質量のない (3+1) 次元中の Dirac フェルミオンを考える. まず, z 方向に一定磁場をかける. 一定磁場をかけるとエネルギーが (Landau)

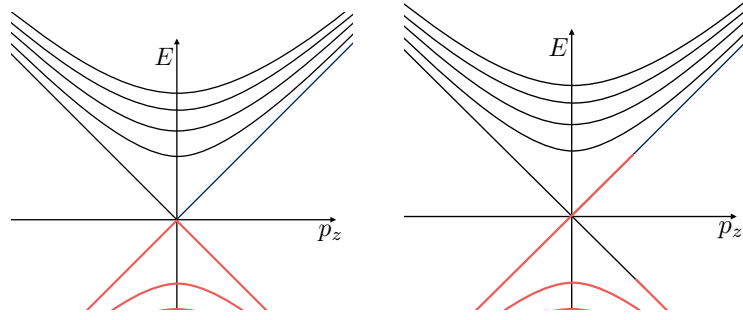


図 6: 磁場中の Dirac フェルミオンのスペクトル (左) . 電場をかけた時の応答 (右)

量子化される (Appendix D 節参照). そのエネルギーは,

$$E(n, p_z, s_z) = \sqrt{p_z^2 + eB(2n+1) - 2eBs_z} \quad (174)$$

となる (図 6 左). s_z は z 方向のスピンである. エネルギー準位は磁場があることで量子化され離散的になっている. また, スピンと磁場の相互作用により $-2eBs_z$ の項が存在する. $n = k \geq 1$ の状態では, $(n, s_z) = (k, 1/2)$ と $(k-1, -1/2)$ の状態が縮退しているが, 最低 Landau 準位は $(0, 1/2)$ で縮退が解けている. 最低 Landau 準位はギャップが無く, $(1+1)$ 次元の Dirac フェルミオンの様に振る舞う. また, 最低 Landau 準位の縮退度は, 単位面積あたり $eB/(2\pi)$ となる. この最低 Landau 準位が量子異常を担う. この状態は, $(1+1)$ 次元の質量ゼロのフェルミオンのように振る舞うので, 4.2 節のアノマリーの議論と同様の議論を行うことができる. ここで, 磁場と並行に電場をかけよう. すると最低 Landau level の粒子は運動方程式 $\dot{p}_z = eE$ に従い加速し, ゼロ・エネルギーより下にあった状態の粒子が励起される (図 6 右). 電場を時間 T だけ加えたとなると, カイラリティ右の粒子は運動量が $p_z = eET$ のところまで励起され, カイラリティ左の反粒子も同様に加速される. その結果, 右巻き, 左巻きの粒子数の変化は

$$\begin{aligned} \Delta Q_R &= V \frac{eB}{2\pi} \int_0^{eET} \frac{dp_z}{2\pi} = VT \frac{e^2 BE}{(2\pi)^2}, \\ \Delta Q_L &= -V \frac{eB}{2\pi} \int_0^{eET} \frac{dp_z}{2\pi} = -VT \frac{e^2 BE}{(2\pi)^2} \end{aligned} \quad (175)$$

となる. ここで, V は空間の体積である. $(1+1)$ 次元の場合と比べて, 磁場に垂直な方向の縮退度 $eBV_\perp/(2\pi)$ の分だけ電荷の変化が大きくなっている. ここで V_\perp は, 磁場に垂直方向の面積である. $(1+1)$ 次元の場合と同様に電荷は変化せず, カイラリティは保存しないことがわかる:

$$\Delta Q = \Delta Q_R + \Delta Q_L = 0, \quad (176)$$

$$\Delta Q_5 = \Delta Q_R - \Delta Q_L = VT \frac{e^2 BE}{2\pi^2}. \quad (177)$$

後者は $(3+1)$ 次元のカイラルアノマリーの式

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{e^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}}{2\pi^2} \quad (178)$$

に対応する．

前節と同様に化学ポテンシャルを入れた場合を考えてみよう (図 7)．カイラリティ右巻きのフェルミオンに注目する．図 7 を見ると高い Landau 準位の状態は磁場に並行と反平行に流れる運動量が

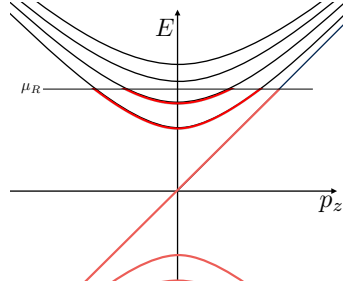


図 7: 右巻き Weyl フェルミオンに磁場をかけ化学ポテンシャルが有限の場合のスペクトル．

キャンセルし最低準位の運動量のみがカレントに寄与することがわかる．同様に左巻きは符号を逆にすれば同じ議論が成り立つ．従って，

$$j_{R/L}^z = \pm \frac{eB}{2\pi} \int_0^{\mu_{R/L}} \frac{dp_z}{2\pi} = \pm \frac{eB}{4\pi^2} \mu_{R/L} \quad (179)$$

となる．電流はこれらのカレントの和なので，

$$j^z = j_R^z + j_L^z = \frac{eB}{4\pi^2} (\mu_R - \mu_L) = \frac{eB}{2\pi^2} \mu_5 \quad (180)$$

となる．これがカイラル磁気効果 (Chiral magnetic effect) である．ここで $\mu_5 = (\mu_R - \mu_L)/2$ である．同様に，軸性カレントは

$$j_5^z = j_R^z - j_L^z = \frac{eB}{4\pi^2} (\mu_R + \mu_L) = \frac{eB}{2\pi^2} \mu \quad (181)$$

となる．ここで $\mu = (\mu_R + \mu_L)/2$ である．これがカイラル分離効果 (Chiral separation effect) である [42, 43]．

4.4 有限群のゲージ化とアノマリー

上記の $U(1)$ 対称性をゲージ化するには，作用に $\int d^{d+1} j^\mu A_\mu$ という項を加えればよかった．同様に有限群 G の対称性をゲージ化するにはどのようにすればよいだろうか？これを考えるために， $(1+1)$ 次元の理論の時空を格子化してみよう．サイトに場が住んでるとしてリンクにゲージリンク V_g を対応させる．



(182)

ゲージリンクは、場を平行移動した時にどれくらい対称性変換を受けたかを表しているのだから、これはゲージリンクに双対な面に対称性演算子のネットワークがあることと等価である：

$$(183)$$

我々は連続理論の有限群のゲージ化を行ないたいので格子間隔ゼロへの連続極限が取れるようにしたい。連続理論では、特異点のない空間の周りを微小に一周しても向きを離散的に変えることはできない。よって連続極限が取れるためには、特異点のない空間の周りを微小に一周しても向きを変えない条件 $g_1 g_2 = g_4 g_3$ を要求する (平坦接続)。従って有限群のゲージ化は、平坦に接続された対称性演算子のネットワークを組むことと定義する。局所的にサイトに定義された場を対称性で変換することで背景場のゲージ変換が実現される。例えば、以下の図の赤い点上の場 ψ を $V_{g_2}^{-1} \psi$ と再定義すると、

$$(184)$$

の左から右のように変化する。この場の再定義で理論が不変であれば、この両辺のゲージ配位に対応した分配関数は等しくなければならない。ネットワークをトポロジカルに変化させることを本稿では単にゲージ変換と呼ぶ。逆にトポロジカルな変化に対して不変にならない場合は、アノマリーを持つことになる。どのようなアノマリーが可能か見るために次元を下げた $(0+1)$ 次元場の量子論 = 量子力学で考えてみよう。この理論には有限群 G の対称性があるとする。 G の元を g_1, g_2 とし、これに対応した対称性演算子を挿入した時のゲージ変換は、

$$(185)$$

と表すことができる。左は、 $U_{g_1} U_{g_2}$ と表され、右は、 $U_{g_1 g_2}$ と表せる。アノマリーがない場合は、両辺が等しくなければならない。一方アノマリーがある場合は、非自明な位相を持つ可能性があり

$$U_{g_1} U_{g_2} = e^{i\theta(g_1, g_2)} U_{g_1 g_2} \quad (186)$$

の形となる。これは射影表現に他ならない。量子論的には対称性は射影表現を持つことは許されるが、射影表現はゲージ理論に格上げすることができないのである。射影表現は、結合律を満たす必要がある：

$$U_{g_1} (U_{g_2} U_{g_3}) = (U_{g_1} U_{g_2}) U_{g_3}. \quad (187)$$

左辺は,

$$U_{g_1}(U_{g_2}U_{g_3}) = e^{i\theta(g_2, g_3)}U_{g_1}U_{g_2g_3} = e^{i[\theta(g_1, g_2g_3) + \theta(g_2, g_3)]}U_{g_1g_2g_3} \quad (188)$$

と評価される．一方右辺は,

$$(U_{g_1}U_{g_2})U_{g_3} = e^{i\theta(g_1, g_2)}U_{g_1g_2}U_{g_3} = e^{i[\theta(g_1g_2, g_3) + \theta(g_1, g_2)]}U_{g_1g_2g_3}. \quad (189)$$

となる．両辺は等しいので, 位相は

$$\theta(g_1, g_2g_3) + \theta(g_2, g_3) = \theta(g_1g_2, g_3) + \theta(g_1, g_2) \quad (190)$$

を満たさなければならない．この位相は, U_g の再定義によって消せるかもしれない． $U_{g_i} \rightarrow U_{g_i} e^{i\tilde{\theta}(g_i)}$ の再定義で位相は,

$$\theta(g_1, g_2) \rightarrow \theta(g_1, g_2) + \tilde{\theta}(g_1g_2) - \tilde{\theta}(g_1) - \tilde{\theta}(g_2) \quad (191)$$

と変化する．この変化で消すことができない位相が射影表現を定める．この条件が数学的にどういふものか見るために演算子 $d^{(n+1)}$ を

$$\begin{aligned} & (d^{(n+1)}\theta)(g_1, \dots, g_{n+1}) \\ & := \theta(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \theta(g_1, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (192)$$

で定義しよう¹⁵．これは, $d^{(n+1)} \circ d^{(n)} = 0$ を満たすことが具体的に計算してみるとわかる． $d^{(n)}$ を用いると, (190) 式の条件は, コンパクトに

$$(d^{(3)}\theta)(g_1, g_2, g_3) = \theta(g_2, g_3) - \theta(g_1g_2, g_3) + \theta(g_1, g_2g_3) - \theta(g_1, g_2) = 0 \quad (193)$$

とまとめられる． U_g の再定義で位相は $\theta(g_1, g_2) + \tilde{\theta}(g_1g_2) - \tilde{\theta}(g_1) - \tilde{\theta}(g_2) = \theta(g_1, g_2) - d^{(2)}\tilde{\theta}(g_1, g_2)$ と変化する．従って, 非自明な位相は $(d^{(3)}\theta)(g_1, g_2, g_3) = 0$ のうち $d^{(2)}\theta(g_1, g_2)$ の形で書けないものである． $(d^{(3)}\theta)(g_1, g_2, g_3) = 0$ となる $\theta(g_1, g_2)$ の集合を $\text{Ker } d^{(3)}$ と表し, そのうち, $d^{(2)}\theta(g_1, g_2)$ の形でかけるものの集合を $\text{Im } d^{(2)}$ と書く． $\text{Ker } d^{(3)}$ のうち, $\text{Im } d^{(2)}$ の違いを同一視した $\text{Ker } d^{(3)} / \text{Im } d^{(2)}$ が可能な射影表現の位相を分類する．これは, コホモロジー $H^2(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ で分類されることを意味する．

射影表現の簡単な例として $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性を持つ理論を考えよう．その4つの群の元を $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ とする．群の掛け算表は, 表1で与えられる．

射影表現を,

$$U_{(0,0)} = 1, \quad U_{(1,0)} = \sigma^x, \quad U_{(0,1)} = \sigma^z, \quad U_{(1,1)} = \sigma^z \sigma^x \quad (194)$$

¹⁵右辺の第一項は, $g_1\theta(g_2, \dots, g_{n+1})$ と書いた方が正確であるが, ここでは, G の θ への作用は自明として落とした．

○	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

表 1: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の元の掛け算表

に取ると, $\theta((1,0), (0,1)) = \theta((1,0), (1,1)) = \theta((1,1), (0,1)) = \theta((1,1), (1,1)) = \pi$ で, ほかはゼロである. この表現はパウリ行列を用いて表されているためヒルベルト空間は少なくとも 2 自由度が縮退している. 一般に射影表現は状態の縮退を意味する. 背理法でこれを示してみよう. 基底状態 $|\Omega\rangle$ に縮退はないと仮定する. すると基底状態は, 対称性演算子の固有状態で, $U_{g_i}|\Omega\rangle = e^{i\theta(g_i)}|\Omega\rangle$ と書ける. この位相は, 対称性演算子を $\tilde{U}_{g_i} := e^{-i\theta(g_i)}U_{g_i}$ と再定義することで取り除くことができる. 一方射影表現であることは,

$$\tilde{U}_{g_1}\tilde{U}_{g_2} = e^{i\theta(g_1, g_2)}\tilde{U}_{g_1g_2} \quad (195)$$

を意味する. 両辺を基底状態に作用させると, $\tilde{U}_{g_1}\tilde{U}_{g_2}|\Omega\rangle = e^{i\theta(g_1, g_2)}\tilde{U}_{g_1g_2}|\Omega\rangle$ より, $|\Omega\rangle = e^{i\theta(g_1, g_2)}|\Omega\rangle$ が導かれ矛盾が生じる. 従って, 真空中に縮退がないという仮定が正しくなく, 基底状態に縮退した状態がなければならない.

同様に高次元理論のアノマリーを考えることができる. $(1+1)$ 次元では, (184) での変化で両辺は等しくなく, そのズレは G の 3 つの元で定まる位相 $\theta(g_1, g_2, g_3)$ で特徴づけられる. この位相は, $d^{(4)}\theta(g_1, g_2, g_3, g_4) = 0$ で, $d^{(3)}\theta(g_1, g_2, g_3)$ の形で掛けないもので, $H^3(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ で分類される. 同様に $(d+1)$ 次元では, この種のアノマリーは $H^{d+1}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ によって分類できる.

5 トポロジカル相

5.1 対称性で守られたトポロジカル相

ゼロ温度の量子相で 2 つのギャップ相が, 理論のパラメータの連続変化に対してギャップを閉じずにある相からある相へ変化できなければ, トポロジカルに異なるという. 対称性で守られたトポロジカル相 (Symmetry protected topological phases, SPT phases) は, 2 つのギャップ相がある対称性 G を保つパラメータの変形によってギャップを閉じずに移り変わらない相である [44, 45, 46, 47]. SPT 相は境界を持たない空間上では基底状態が 1 つでギャップを持っているが, 境界を持つ場合, なんらかの縮退が現れ, 境界の理論は対称性 G についてアノマリーを持つという特徴がある. この境界理論のアノマリーはバルクの理論の非自明な位相とキャンセルし全体としてはアノマリーを持たない. ここでは簡単なモデルを用いてこれらを見てみよう.

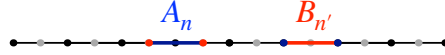


図 8: Cluster Hamiltonian に含まれる演算子 A_n, B_n .

例 4 $(1+1)$ 次元 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性に守られたトポロジカル相

SPT 相が現れるモデルとして, 以下のハミルトニアンを考えよう [48, 49]:

$$H = - \sum_{n=0}^{N-1} A_n - \sum_{n=0}^{N-1} B_n. \quad (196)$$

ここで, A_n, B_n は

$$A_n := \tau_{n-1/2}^z \sigma_n^x \tau_{n+1/2}^z, \quad B_n := \sigma_n^z \tau_{n+1/2}^x \sigma_{n+1}^z \quad (197)$$

で定義される. $A_0 = \tau_{N-1/2}^z \sigma_0^x \tau_{0+1/2}^z$ および $B_{N-1} = \sigma_{N-1}^z \tau_{N-1/2}^x \sigma_0^z$ とし空間方向には周期境界条件を課す. σ^i, τ^i は Pauli 行列 [(28) 式を参照] である. A_n, B_n は $A_n^2 = B_n^2 = 1$ で, すべて可換である: $[A_n, A_m] = [B_n, B_m] = [A_n, B_m] = 0$. このモデルは, 0 次対称性として $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性を持ち, その対称性変換演算子は

$$U_\sigma := \prod_{n=0}^{N-1} \sigma_n^x, \quad U_\tau := \prod_{n=0}^{N-1} \tau_{n+1/2}^x \quad (198)$$

で与えられ, 荷電演算子は $\sigma_n^z, \tau_{n+1/2}^z$ である. このモデルは, イジング模型と異なりハミルトニアンと可換な点的な演算子は存在しない. 代わりに, 端を持つ線的な演算子

$$\begin{aligned} A_{n,m} &:= \prod_{m \leq k \leq n} A_k = \tau_{n+1/2}^z \prod_{m \leq k \leq n} \sigma_k^x \tau_{m-1/2}^z, \\ B_{n,m} &:= \prod_{m \leq k \leq n} B_k = \sigma_{n+1}^z \prod_{m \leq k \leq n} \tau_{k+1/2}^x \sigma_m^z \end{aligned} \quad (199)$$

がハミルトニアンと可換である. この演算子がなす代数は 2 群の構造を持つがここでは詳細には立ち入らない. 興味がある人は Appendix C を見てほしい.

A_n, B_n がハミルトニアンと可換なので, 状態は A_n, B_n の固有値 (± 1) を用いて表すことができる. さらに A_n, B_n はサイトの数だけ独立に存在するので, A_n, B_n の固有値を指定すれば状態が一意に決まる. 基底状態は, エネルギーを最小化すれば良いので, $A_n|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ かつ $B_n|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ を満たす状態, つまり A_n, B_n の固有値がすべて $+1$ の状態に取れば良い. この状態はクラスター状態と呼ばれ縮退のない基底状態である.

次に境界がある場合を考えてみよう. ここでは, open boundary condition ($\tau_{-1/2} = \tau_{N+1} = 0$) を考える. ハミルトニアンは,

$$H = - \sum_{n=1}^{N-1} A_n - \sum_{n=0}^{N-2} B_n \quad (200)$$

となり, やはり状態は A_n および B_n の固有値で指定できるが, A_0 及び B_N の固有値にエネルギーは依存しない. このため基底状態は 4 重に縮退する. 境界がある場合に縮退が生じることが SPT 相の特徴である.

SPT 相は、対称性をゲージ化した時の分配関数 Z の位相で特徴づけられる。背景場の元での分配関数を評価してみよう。 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性に対応したゲージ場をそれぞれ A, B として、分配関数を $Z[A, B]$ と書くことにする。有限群のゲージ場の配位は対称性演算子のネットワークで表現される (図 9 左上)。例として、図 9 の背景場の元での分配関数を評価してみよう。分配関数はネットワークのト

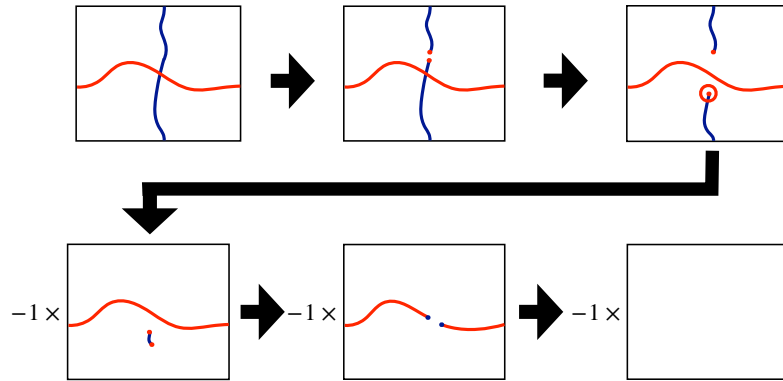


図 9: 対称性の背景場と結合した分配関数の評価

ポロジカルな変形に対して不変である。 $1 = \tau^z \tau^z$ を挿入することで、ループ演算子を切って線の演算にすることができる。これを変形させて点に潰していく操作を行なってみよう。点が線をまたぐときに対称性変換を受けるので、 $-1 = e^{i\pi}$ が現れる。さらに $1 = \sigma^z \sigma^z$ を挿入して赤い線も変形させて潰す。そうすると図 9 の右下の様になる。結果としてゲージ化された分配関数は、 $Z[A, B] = e^{i\pi} Z[0, 0]$ となり位相 $e^{i\pi}$ を持つことがわかる。より一般には、 A と B の交点の数 (向きも考慮) を s として、 $e^{i\pi s} \in \mathbb{Z}_2$ となる。つまり交点数に応じて符号を変える。この分配関数の評価はネットワークの交点に非自明な位相が付与されていたことに対応する。次節でみるようにこの交点にどのような位相を付与できるかの分類が SPT の分類に対応する。

境界を持つ場合の境界理論は、 $(1+0)$ 次元場の理論 = 量子力学である。サイト $n = 0$ の端点には、対称性の演算子 $U_\sigma = \sigma^x, U_\tau = \sigma^z$ が住んでいる。端点の理論だけ取り出すと対称性演算子は $U_\sigma U_\tau = -U_\tau U_\sigma$ と非可換になっているため、 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性のゲージ化はうまくいかない (アノマリー)。次節で、図で見るようにこのアノマリーはバルクの理論の交点の位相からの寄与とキャンセルしてバルクと境界を含めた全体の理論を考えるとアノマリーは持たない。

5.2 (1+1) 次元 SPT 相の分類

前節の例を抽象化することで、 $(1+1)$ 次元の対称性 G で守られた (ボソンの) トポロジカル相を分類してみよう。どのような SPT 相が可能か見るにはゲージ化した分配関数を見るとよい。分配関数に現れる位相を用いて SPT 相を分類することができる。有限群のゲージ化は、対称性演算子のネットワークを組むことに対応した。ゲージ場は平坦接続でゲージ変換はネットワークの変化に対応した。分配関数の位相は、ネットワークのジャンクションに付与されているとしよう。つまり、 g_1, g_2 の

ジャンクションに対して、位相 $e^{i\theta(g_1, g_2)}$ が付与されているとする。ここで、 g_1, g_2 は G の元である。ゲージ不変性はネットワークの変形

$$\begin{array}{c} \diagup \\ g_1 \diagdown \\ g_2 \diagup \\ g_3 \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \diagup \\ g_1 \diagdown \\ g_2 \diagup \\ g_3 \diagdown \end{array} \quad (201)$$

に対して位相は変化しないこと意味する。これは、

$$e^{i\theta(g_1, g_2)} e^{i\theta(g_1 g_2, g_3)} = e^{i\theta(g_2, g_3)} e^{i\theta(g_1, g_2 g_3)} \quad (202)$$

という条件を導き、(192) 式を用いてコンパクトに書くと

$$(d^{(3)}\theta)(g_1, g_2, g_3) = \theta(g_2, g_3) - \theta(g_1 g_2, g_3) + \theta(g_1, g_2 g_3) - \theta(g_1, g_2) = 0 \quad (203)$$

となる。位相は対称性演算子の U の再定義によって消せるかもしれない。再定義で、位相は $\theta(g_1, g_2) \rightarrow \theta(g_1, g_2) + \tilde{\theta}(g_1 g_2) - \tilde{\theta}(g_1) - \tilde{\theta}(g_2) = \theta(g_1, g_2) - d^{(2)}\tilde{\theta}(g_1, g_2)$ と変化する。従って、非自明な位相は、 $(d^{(3)}\theta)(g_1, g_2, g_3) = 0$ で $d^{(2)}\theta(g_1, g_2)$ の形で書けないものといえる。これは、 $(0+1)$ 次元のアノマリーの分類と同じでコホモロジー $H^2(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ で分類されることを意味する。

SPT 相の特徴は、理論が境界を持つ場合、その境界理論にアノマリーが現れる点である。境界は $(0+1)$ 次元つまり量子力学で、アノマリーに対応するのは射影表現である。このアノマリーはバルクの SPT のジャンクションが持つ位相と合わせることでキャンセルされ、境界とバルクを含めた理論にはアノマリーは存在しない (バルクエッジ対応)。この対応を図で表すと

$$\begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ | \end{array} \quad (204)$$

のようになる。バルクのジャンクションの位相が境界に流れ込んでいることがわかる (anomaly inflow)。この位相は、射影表現の位相 (アノマリー) とキャンセルする。

5.3 高次対称性の破れとトポロジカル秩序

この節では、高次対称性がトポロジカル秩序を持った相の分類に役に立つのを見てみよう。トポロジカル秩序の典型的な性質として、

- 時空の多様体の依存した基底状態の縮退
- エニオン統計
- 局所的な摂動に対して安定

があげられる [50]。様々なトポロジカル秩序を持つ系が提案されているが、可換エニオンが現れる分数量子系や toric code [51] などのトポロジカル秩序は、高次対称性の破れを用いて理解できる [52]。高次対称性はミクロナ理論が持っている場合もあれば低エネルギーで創発することもある。一般に高次対称性が低エネルギーで自発的に破れていればトポロジカル秩序を示す。自発的対称性の破れの条

件から，秩序演算子は低エネルギー極限で，面積に依存しなくなりトポロジカルになるため秩序演算子も対称性演算子とみなせる．つまり， p 次対称性が自発的に破れている場合， $(d-p)$ 次対称性が創発し自発的に破れている．従って Type-B 的に高次対称性が破れた相とみなすことができる．

例 5 分数量子ホール系

トポロジカル秩序を持った例として $(2+1)$ 次元の分数量子ホール系の有効理論を考える [53]．分数量子ホール系のホール伝導度は，自然単位系で $\nu e^2/(2\pi)$ に量子化される¹⁶．ここで ν は分数に値をとり， m を奇数として $\nu = 1/m$ とする．低エネルギーの有効理論は，レベル m の $U(1)$ Chern-Simons 理論で記述され，その作用は

$$S = -\frac{m}{4\pi} \int ada + \frac{1}{2\pi} \int Ada \quad (205)$$

と書ける．ここで， a はダイナミカルな 1 形式の自由度で，ゲージ対称性 $a \rightarrow a + d\theta$ を持つ．大文字の A は $U(1)$ ゲージ場で，ここでは外場として扱われる．まず，この理論の $U(1)$ カレントは，分数量子ホール効果を示す事を見てもよい． $U(1)$ カレントは，作用を A で微分することで得られ

$$j = \frac{\delta S}{\delta A} = \frac{1}{2\pi} da \quad (206)$$

と書ける．また，運動方程式は a で変分して，

$$\frac{m}{2\pi} da = \frac{1}{2\pi} dA \quad (207)$$

となる．(207) 式を (206) 式に代入してカレントは，

$$j = \frac{1}{2\pi m} dA \quad (208)$$

と書ける．電荷はゲージ場に吸収する表記で行っていたので，通常のホール伝導度は， e^2 を掛けて $e^2/(2\pi m)$ になる．

この有効理論は， \mathbb{Z}_m -1 次対称性を持つ．荷電演算子は 1 次元的に広がった Wilson ループ $W(\mathcal{C}^1) = \exp(i \int_{\mathcal{C}^1} a)$ で，対称性演算子も Wilson ループ $U_{e \frac{2\pi n}{m} i}(\mathcal{M}^1) = \exp(in \int_{\mathcal{M}^1} a)$ である． \mathcal{M}^1 と \mathcal{C}^1 がリンクしている時，

$$U_{e \frac{2\pi n}{m} i}(\mathcal{M}^1)W(\mathcal{C}^1) = e^{\frac{2\pi kn}{m} i} W(\mathcal{C}^1) \quad (209)$$

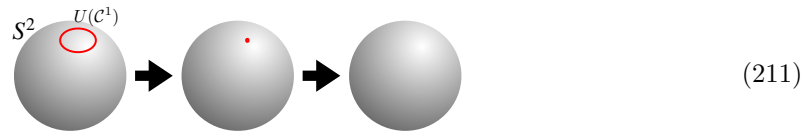
となる．対称性演算子それ自身が荷電演算子であるので， \mathcal{M}^1 と \mathcal{M}^1 がリンクしている時，

$$U_{e \frac{2\pi n}{m} i}(\mathcal{M}^1)U_{e \frac{2\pi l}{m} i}(\mathcal{M}^1) = e^{\frac{2\pi ln}{m} i} U_{e \frac{2\pi l}{m} i}(\mathcal{M}^1) \quad (210)$$

が成り立つ．従って， $e^{(2\pi ln/m)i} \langle U_{e \frac{2\pi l}{m} i}(\mathcal{M}^1) \rangle$ は秩序演算子で，期待値はゼロでない．この時 \mathbb{Z}_m -1 次対称性は，Type-B 的に自発的に破れている．

¹⁶ $\hbar = h/2\pi$ を復活させると $\nu e^2/(2\pi\hbar) = \nu e^2/h$ である．

基底状態の多様体に依存した縮退を見てみよう．まず空間が球面 S^2 の場合を考える．この時，ループ演算子を基底状態に作用させても潰せて消せてしまう：



従って，対称性演算子が真空に作用できない．一方，空間がトーラスであれば，2つの方向に巻き付くことができる：

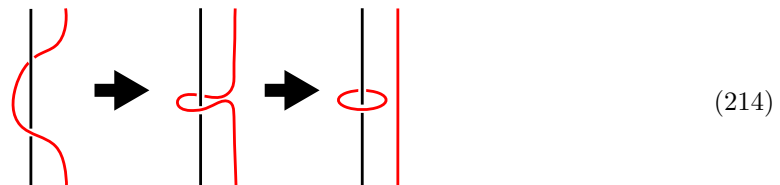


2つの方向をそれぞれ，1, 2 とする．すると，トーラス上では，(210) 式より $U_1 U_2 U_1^\dagger = e^{2\pi i/m} U_2$ の代数を持つことわかる．このような代数を満たす時，基底状態は常に縮退する．これを見てみよう． U_1, U_2 はともに対称性演算子であるので，真空を U_2 の固有状態に取る： $U_2|\Omega\rangle = e^{i\phi}|\Omega\rangle$ ．ここで， ϕ は， U_2 の固有値である． U_1 の固有状態に取ったとしても議論は変わらない．次に $|\Omega'\rangle = U_1^\dagger|\Omega\rangle$ という状態を考える． U_1 は対称性演算子であるので，エネルギーは $|\Omega\rangle$ と縮退する．また， $|\Omega'\rangle$ は U_2 の固有状態でもある．その固有値は，

$$U_2|\Omega'\rangle = U_2 U_1^\dagger|\Omega\rangle = U_1^\dagger U_1 U_2 U_1^\dagger|\Omega\rangle = U_1^\dagger e^{\frac{2\pi}{m}i} U_2|\Omega\rangle = e^{\frac{2\pi}{m}i + i\phi}|\Omega'\rangle \quad (213)$$

より， $e^{(2\pi/m + \phi)i}$ であることがわかる．従って， $|\Omega\rangle$ と $|\Omega'\rangle$ は，同じエネルギーを持ち， U_2 の異なる固有値を持つ固有状態で直交している．陽には， $\langle\Omega|\Omega'\rangle = \langle\Omega|U_2^\dagger U_2|\Omega'\rangle = e^{2\pi i/m} \langle\Omega|\Omega'\rangle$ より，直交 $\langle\Omega|\Omega'\rangle = 0$ していることがわかる．トーラスの上では，巻きつける方向は2方向だけなので真空は m 重に縮退する．より一般に種数 (genus) g の多様体上では， m^g 重縮退する． S^2 の場合の種数は $g = 0$ ，トーラスの場合は $g = 1$ である．

次にエニオン統計が現れることを見てみよう．エニオンは，ゲージ場 a の端点に住んでいる励起状態とみなすことができる．エニオンの時空上の軌跡は Wilson line で表される．エニオンの周りを別のエニオンが1周する様子を描くと次の図の左のようになる：



Wilson line はトポロジカルであるので変形すると右のようになる．このリンクによって位相 $e^{2\pi i/m}$ を獲得することになり，エニオンの入れ替えはこの半分に対応し $e^{\pi i/m}$ の位相を獲得する．

最後に，摂動に対する安定性を考察する．これは次のように理解できる．1次対称性は，点的な物体には作用できない．従ってハミルトニアンに局所的な摂動項を加えても陽に対称性は破れないため，トポロジカル秩序は安定である．

例 6 Toric code

別の例として Toric code [51] を考えてみよう．Toric code のハミルトニアンは，

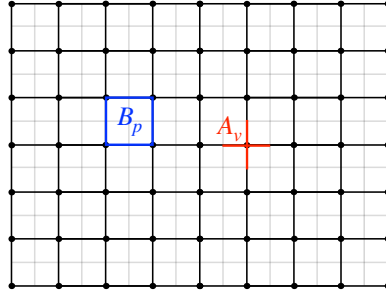


図 10: Toric code に現れる演算子 A_v と B_p .

$$H = - \sum_v A_v - \sum_p B_p \quad (215)$$

で与えられる．ここで，

$$A_v = \prod_{j \in v} \sigma_j^x, \quad B_p = \prod_{j \in p} \sigma_j^z \quad (216)$$

でスピンは，リンク上に定義され， v, p は図 10 のように定義される． x, y 方向にそれぞれ N サイトあり周期境界条件が課されているものとする． A_v は σ^x しか含まず， B_p は σ^z しか含まないため， $[A_v, A_{v'}] = [B_p, B_{p'}] = 0$ であることがわかる．また， A_v と B_p は，辺を 0 または，2 個のみしか共有しないため， $[A_v, B_p] = 0$ であることもわかる．従ってこれらはハミルトニアンと可換である： $[H, A_v] = [H, B_p] = 0$ ．つまり， B_p と A_v は対称性演算子である． $A_v^2 = 1$ および $B_p^2 = 1$ なので， \mathbb{Z}_2 対称性である．また， B_p はループ演算子とみなすことができ， A_v も双対格子上的ループ演算子とみなせるので，Toric code は， $\mathbb{Z}_2^{[1]} \times \mathbb{Z}_2^{[1]}$ 対称性を持っていることを示唆する¹⁷．これらの対称性の演算子を $U_E(\mathcal{M}^1)$ ， $U_M(\mathcal{M}^1)$ と書くことにする．ここで \mathcal{M}^1 は時空上の 1 次元的な閉じた経路である．対称性演算子に対して，荷電演算子が存在するが， $U_E(\mathcal{M}^1)$ に対しては， $U_M(\mathcal{C}^1)$ が荷電演算子になっている．逆も成り立っている¹⁸．この事実から，分数量子ホール系と同様に多様体のトポロジーに応じた縮退が現れることになる．今考えている状況では x 方向， y 方向に周期境界条件が課されているので x 方向に $U_E(\mathcal{C}^1)$ ， $U_M(\mathcal{C}^1)$ を巻き付けた状態を考えることができる． $U_E(\mathcal{M}^1)$ ， $U_M(\mathcal{M}^1)$ の巻き付いてる数を (e, m) と表して， $(0, 0)$ ， $(0, 1)$ ， $(1, 0)$ ， $(1, 1)$ の 4 通りの巻き付けパターンが生じるので基底状態は 4 重に縮退する．この縮退は，別の方法を用いて確かめることもできる．基底状態は，エネルギーが最低になる状態なので， $A_v = 1$ ， $B_p = 1$ となる状態が基底状態となる．その時の基底状態のエネルギーは $E = -4N^2$ である．リンクは， $2N^2$ 個存在し，各状態に 2 自由度のスピンが乗っているので，ヒルベルト空間の次元は， 2^{2N^2} である． A_v, B_p の数は，それぞれサイ

¹⁷本稿での高次対称性の定義では，時間方向に対してトポロジカルであるだけでなく空間方向にもトポロジカルである演算子としている．一般にはハミルトニアンと可換であるだけでは，空間方向にもトポロジカルかは自明ではない．Toric code の場合は，基底状態はすべての A_v, B_p が真空に自明に作用するため，基底状態に注目した場合は高次対称性を持っていると言えるだろう．

¹⁸ $\mathbb{Z}_2^{[1]} \times \mathbb{Z}_2^{[1]}$ の間に mixed anomaly があることに対応する．

トの数 N^2 だけ存在する．しかしこれらは $\prod_v A_v = 1, \prod_p B_p = 1$ という恒等式が成り立つため，すべてを独立な条件として数えると数えすぎになる．従って，恒等式を考慮して $2N^2 - 2$ 個が独立な条件となる．結果として， $2N^2 - (2N^2 - 2) = 2$ より， $2^2 = 4$ 重の縮退となる．励起状態は，基底状態からスピンを反転させることで得られる．この状態は，開いたライン演算子で表現される．端の粒子 (anyon) は電氣的，磁氣的電荷を持ち，その粒子を交換すると分数統計を示す．この振る舞いは，分数量子ホール系と同様である．対応する低エネルギーの有効理論は， $m = 2$ として

$$S = -\frac{m}{2\pi} \int adb \quad (217)$$

と表されることが知られている．

ここでは， $(2+1)$ 次元の分数量子ホール系や toric code を考えたが，これは高次元にも拡張できる． $(3+1)$ 次元の例としては， s 波超伝導が挙げられる．超伝導相は，電荷 2 のクーペアの凝縮に対応して，低エネルギーで \mathbb{Z}_2 -1 次対称性と \mathbb{Z}_2 -2 次対称性が創発している．渦糸と準粒子の間にエニオン統計的な振る舞いが見られる．渦糸の周りを準粒子が 1 周すると得られる π の Aharonov-Bohm 位相がそれに対応する．より一般に $(d+1)$ 時空で， p 次対称性が自発的に破れれば $(d-p)$ 次対称性が創発し破れトポロジカル秩序を示す．ここで紹介したトポロジカル秩序を持った相に現れる励起は可換エニオンと呼ばれるものである．より一般には，非可換エニオンという励起も存在する．その分類には，群を含むより一般的なテンソル圏を用いた方法が提案されている．

6 おわりに

本稿では，場の量子論における対称性の基礎 (通常対称性と高次対称性) とその応用として自発的破れやトポロジカル物質における対称性の役割を紹介した．最後に，ここでは取り上げることができなかった自発的対称性の破れに関するいくつかのトピックス (時空対称性，ボソンとフェルミオンの間の対称性，開放系における対称性の自発的破れ) を紹介しよう．

時空対称性の自発的破れは，内部対称性の自発的破れに比べて，破れた対称性の数と NG モードの数の間の関係もその分散関係も一般に複雑になる．例えば NG モードの数に関しては，結晶のように回転対称性と並進対称性が同時に破れた場合は，回転対称性の破れに対する NG モードは現れず，並進の破れの NG モードだけが現れることが知られている．これは，回転対称性の生成子である角運動量は，運動量密度 T^{0i} を用いて $J^{ij} = \int d^d x (x^i T^{0j} - x^j T^{0i})$ と書け，場としての独立な自由度は T^{0i} であることに関係する [37, 54, 55]．有効理論では，この低エネルギー自由度の減少は，逆ヒッグス現象として知られている [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62]．時空対称性の自発的破れは，等方性や一様性を破るため分散関係も複雑である．例えば水面の波は，並進対称性の自発的破れにともなう NG モードと解釈できるが，その分散関係は，水面の重力が無視できるとすると $\omega \sim k^{3/2}$ ，重力による陽な破れの効果を入れると $\omega \sim k^{1/2}$ で振る舞うことが知られている¹⁹ [63]．さらに，液晶のスメクティック A 相など異方性を持つ場合を考えると分散関係にも異方性が現れより複雑になる [64]．

¹⁹運動量 P_i と粒子数密度 $n(x)$ のポアソン括弧 $\langle\langle P_i, n(x) \rangle\rangle_P \neq 0$ が有限になるので Type-B 的破れである．

ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性は、相対論的な場の理論の場合、超対称性と呼ばれるボアンカレ対称性を拡張した時空対称性の一部になり、その対称性が自発的に破れると質量ゼロの線形分散を持つ南部-Goldstone フェルミオンが現れる [65, 66]。超対称性の生成子の反交換関係が期待値を持ち自発的に破れるため、Type-B に属することになるが分散関係は線形である。これは、超対称性が時空対称性であることと関係する。同様に非相対論的な系でもボソンとフェルミオンを入れ替える対称性を考えることができる。非相対論的な場合のボソンとフェルミオンの対称性も相対論的な場合と同様に“超対称性”と呼ぶことにしよう。相対論的な場合と違い、この対称性は内部対称性にも時空対称性の一部にもなりうる。この超対称性は、ボースフェルミ混合系での実現が期待される [67, 68, 69, 70, 71, 72]。そこでは、相対論的な場合と同様に超対称性の生成子の反交換関係が期待値を持ち Type-B 的に破れる²⁰。超対称性の生成子を含む対称性の生成子の代数が内部対称性で閉じている場合は、典型的に南部-Goldstone フェルミオンは 2 乗分散となる。例えば、模型による解析では南部-Goldstone フェルミオンは 2 乗分散を持つことが示されている [73, 74]。フェルミオンは、ボソンと異なりフェルミ面を形成したりトポロジカルな理由でゼロモードが現れる場合があるため、ボソンの対称性の自発破れに比べて豊富な現象が現れる可能性がある。その例として (1+1) 次元の Nicolai 模型を拡張した格子模型の解析があげられる [75, 76, 77, 78]。そこでは、 $\omega \sim k^3$ となるようなモードや、Type-B 的自発的破れから予想される NG モードの数にミスマッチが現れる。このミスマッチは、超対称性の自発的破れだけでなく、別のトポロジカルな理由でゼロモードが現れ、そのモードと超対称性の自発的破れのモードが結合することで起きていると考えられる。本稿では、自発的破れ起源以外のゼロモードはないと仮定していた。この仮定を外し、自発的破れ起源のモードとトポロジカル起源のモードが同時に存在して混ざるような系での一般論の構築は面白いだろう。

注目している系が環境と相互作用する開放系への拡張も興味深い。開放系では、環境からのエネルギー注入と散逸によって対称性が自発的に破れるという孤立系と異なるメカニズムで対称性の破れが生じる可能性がある [79]。また、孤立系と異なり非平衡定常状態を作ることでも可能で、孤立量子系の基底状態で禁止されるような時間並進対称性の自発的破れや、その破れにともなう NG モードも考えることができる [80, 81, 82, 83]。他にも鳥や魚の群れといった個々の物体は意思を持って動く系 (アクティブマター) も開放系と捉えることができ、そのような系での自発的対称性の破れも考える事ができる。例えば、鳥や魚の群れの例では、重力を無視すると系には空間回転対称性があり群れがある方向に集団的に動くという現象は、回転対称性の自発的破れとみなすことができる [84, 85]。開放系は孤立系の保存量であったエネルギー、運動量、粒子数などが保存しなくなるため、開放の対称性は何かという問題が生じるが、これは、開放系の理論を経路積分表示することで作用を構成することができ、その作用の対称性とその自発的破れを解析することで解決される [86]。孤立系で Type-A モードだった NG モードは、開放系では拡散モードになる。つまり伝搬関数の極が波数の小さい所で $\omega = -ick^2$ と振る舞う。一方、孤立系で Type-B だったモードは、典型的には $\omega = c_1k^2 - ic_2k^2$ のような伝播しながら拡散するモードに変化する。しかしながらこの Type-B モードは、過減衰することで拡散モードになる場合があり自発的破れと分散関係の間の関係は理論の詳細によってしまい、

²⁰原理的には、Type-A 的に超対称性が破れる例があっても良いと思うがそのような例は私は知らない。

その一般論は、残念ながら孤立系のようにきれいなものにはならない [87]. 孤立系では、対称性が自発的に破れた場合、非線形表現を用いた低エネルギーの有効理論が構成できた。開放系でも同じ様に低エネルギーの有効理論を構成する試みが行われている [88].

A 微分形式

$(d+1)$ 次元空間上の微分形式を簡単にまとめておく。外積 (wedge 積) \wedge を

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (218)$$

となるように導入する。つまり、 dx^μ と dx^ν を入れ替えると $(-)$ が付く。従って添字が等しい dx^μ の外積はゼロになる: $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$. 同様に 3 つの場合は、

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = -dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\rho = -dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\nu \quad (219)$$

となるように定義される。4 つ以上の場合も同様に定義される。

k 形式は、

$$B := \frac{1}{k!} B_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (220)$$

と定義される。外微分 d は、 k 形式から $k+1$ 形式の写像で、

$$dB := \frac{1}{k!} \partial_\nu B_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (221)$$

と定義される。外微分は 2 回作用させるとゼロになる: $d^2 B = 0$. $dB = 0$ となる k 形式 B は、閉 k 形式と呼ばれる。閉形式のうちある $(k-1)$ 形式 C が存在して、 $B = dC$ と書ける時、 B は完全 k 形式と呼ばれる。

Hodge 双対を

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) := \frac{\sqrt{|g|}}{(d+1-k)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_{d+1}} dx^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{d+1}} \quad (222)$$

と定義する。ここで、 $g_{\mu\nu}$ は計量で、 $|g| = |\det g_{\mu\nu}|$ である。Minkowski 計量 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ の場合は、 $|g| = 1$ である。体積要素は、1 の Hodge 双対で定義する:

$$\Omega := *1 = \frac{\sqrt{|g|}}{(d+1)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d+1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{d+1}} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{d+1}. \quad (223)$$

k 形式、 A と B の内積を

$$(A, B) = \int A \wedge *B \quad (224)$$

と定義する。陽に書くと、

$$\int A \wedge *B = \frac{1}{k!} \int A_{\mu_1 \dots \mu_k} B^{\mu_1 \dots \mu_k} \Omega \quad (225)$$

である .

Stokes の定理

\mathcal{M} を境界 $\partial\mathcal{M}$ を持つ向きづけされた $(k+1)$ 次元多様体とする . k 形式 ω の $\partial\mathcal{M}$ 上の積分について , Stokes の定理は ,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega \quad (226)$$

と定式化される .

Maxwell 方程式

Minkowski 空間における Maxwell 方程式は , 以下で与えられる:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (227)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_0 \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (228)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (229)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{B} = 0. \quad (230)$$

4 元ベクトルポテンシャル $A^\mu := (A^0, \mathbf{A})$ を用いると電場と磁場は ,

$$e\mathbf{E} := -\nabla A^0 - \partial_0 \mathbf{A} = (F^{01}, F^{02}, F^{03}), \quad (231)$$

$$e\mathbf{B} := \nabla \times \mathbf{A} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}) \quad (232)$$

と書ける . ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である . $ej^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ として , Maxwell 方程式は ,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + e^2 j^\nu = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad (233)$$

とまとめられる . 微分形式を用いると ,

$$d * F = e^2 * j, \quad dF = 0 \quad (234)$$

にまとまる . ここで ,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (235)$$

$$*F = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (236)$$

$$*j = \frac{1}{3!} j^\mu \epsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} dx^\lambda \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (237)$$

である . 電磁場の作用は , 微分形式を用いると

$$S = - \int d^4x \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = - \frac{1}{2e^2} \int F \wedge *F \quad (238)$$

と表される .

B Noether の定理

作用が場のある微小変換の元で不変である時、それに付随した保存カレント (Noether カレント) が存在する。これは Noether の定理と呼ばれる。ここでは Noether の定理及び Noether カレントを導出しよう。場の微小変換 $\phi_n(x) \rightarrow \phi_n(x) + \epsilon^\alpha h_{an}(x)$ (ϵ^α は無限小の定数) の元で作用 $S[\phi]$ が不変であるとする。つまり、作用は、

$$\delta S = \epsilon^\alpha \int d^{d+1}x \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_n(x)} h_{an}(x) = 0 \quad (239)$$

を満たす。一般に $h_{an}(x)$ は場に依存してもよいし、陽に座標に依存してもよい。例えば $U(1)$ 対称性を持つ複素スカラー場の理論の場合、複素場 φ の $U(1)$ 変換 $\varphi \rightarrow e^{i\theta}\varphi$ の元で作用は不変である。微小変換は $\theta = \epsilon$ に取って 1 次まで展開すると、 $\varphi \rightarrow \varphi + i\epsilon\varphi$ となるので、 $h = i\varphi$ となる。

次に、 ϵ^α が座標に依存する場合を考えよう： $\phi_n(x) \rightarrow \phi_n(x) + \epsilon^\alpha(x)h_{an}(x)$ 。 $\epsilon^\alpha(x)$ が定数の場合には、作用は不変になるので、

$$\delta S = - \int d^{d+1}x j_a^\mu(x) \partial_\mu \epsilon^\alpha(x) \quad (240)$$

の形を取らなければならない。ここで $j_a^\mu(x)$ は Noether カレントである。運動方程式を満たす時、任意の場の変分に対して δS はゼロになるので、(240) 式はゼロとなり、これを $\epsilon^\alpha(x)$ で汎関数微分することで、保存則

$$\partial_\mu j_a^\mu(x) = 0 \quad (241)$$

を得る。電荷は電荷密度の積分

$$Q_a := \int d^d x j_a^0(x) \quad (242)$$

と定義され、

$$\frac{d}{dt} Q_a = \int d^d x \partial_0 j_a^0(x) = - \int d^d x \partial_i j_a^i(x) = 0 \quad (243)$$

より、 Q_a は時間に依存しないことがわかる。ここで場が無限遠で落ちるとし表面項を落とした。また、量子化された理論において Q_a は微小変換の生成子になっている：

$$-[iQ_a, \phi_n(x)] = h_{an}(x). \quad (244)$$

量子と古典の間に、 $\{-, -\}_P \leftrightarrow -i[-, -]$ の関係があるので、古典論では $\{Q_a, \phi_n(x)\}_P = h_{an}(x)$ となる。

ここで、 j_a^μ の陽な形を求めてみよう。作用 $S = \int d^{d+1}x \mathcal{L}$ が場の微小変換の元で不変であれば良いので、ラグランジアン密度 \mathcal{L} は $\delta \mathcal{L} = \epsilon^\alpha \partial_\mu X_a^\mu$ という全微分項を持って良い。これを考慮すると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n} \epsilon^\alpha(x) h_{an}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_n} \partial_\mu (\epsilon^\alpha(x) h_{an}(x)) \right) \\ &= \int d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_n} h_{an}(x) \partial_\mu \epsilon^\alpha(x) + \epsilon^\alpha(x) \partial_\mu X_a^\mu(x) \right) \\ &= - \int d^{d+1}x \left(- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_n} h_{an}(x) + X_a^\mu(x) \right) \partial_\mu \epsilon^\alpha(x) \end{aligned} \quad (245)$$

となる。1行目から2行目へは、 ϵ^a が定数の場合にラグランジアン密度が $\epsilon^a \partial_\mu X_a^\mu$ だけ変化することを
 用いた。また、3行目へは部分積分を用いた。従って Noether カレントは $j_a^\mu(x)$ は

$$j_a^\mu(x) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_n} h_{an}(x) + X_a^\mu(x) \quad (246)$$

と書ける。

C 2群

Cluster Hamiltonian は2群の構造を持っている。ここでは、2群について解説する。まず、通常
 の群の復習から始めよう。群 (G, e, \circ) とは、集合 G と G 上の2項演算子 $\circ: G \times G \rightarrow G$ が以下の性
 質を満たすものを言う:

結合則 任意の G の元 g_1, g_2, g_3 に対して、 $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ を満たす。

単位元の存在 任意の G の元 g に対して $e \circ g = g$ 及び $g \circ e = g$ を満たす G の元 e が存在する。

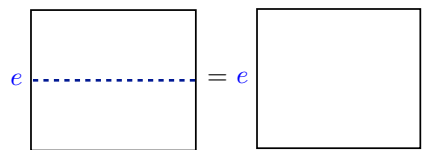
逆元の存在 任意の G の元 g に対して、 $g^{-1}g = gg^{-1} = e$ となる G の元 g^{-1} が存在する。

以下では、 $g_1 \circ g_2$ を単に $g_1 g_2$ と表すことにする。図を用いて群を表現しよう。1次元的に表現する
 こともできるが、ここでは、2群の説明にも利用するために2次的表現を用いる。まず G の元 g を
 2次元空間中の1次的物体として、



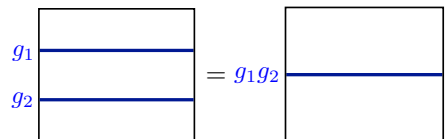
$$(247)$$

と表現する。単位元は、点線または、線を描かずに表現する:



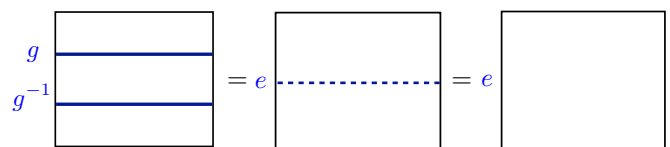
$$(248)$$

群の積を表現すると



$$(249)$$

となる。逆元との積は、



$$(250)$$

と表される．結合則は

(251)

と表現される．

次に 2 群を考えよう．2 群 (G, H, t, α) は, crossed module と呼ばれる．正確な定義は後にして, 先に図を使って概要を説明する． G は 0 次対称性に対応した群で, 図を用いた表現は, 2 次元空間上の線で上の群と同じように表現できる． H は “1 次対称性に対応する群” で, H の元 h は, 端点を持つ線で表現される:

(252)

1 次対称性と違うのは, h が G の元 $t(h)$ でラベルされた線の端点になっている点である．本文で出てきた 1 次対称性は, すべての h に対して $t(h)$ が自明, つまり $t(h) = e$ の場合に対応する． h_1, h_2 の積は,

(253)

と表現され, t は $t(h_1h_2) = t(h_1)t(h_2)$ を満たすように定義される (準同型)． α は h の 0 次対称性の元での変換を表し, 図で表現すると,

(254)

となる．ここで t と α は, $t(\alpha_g(h)) = gt(h)g^{-1}$ の関係を満たすように定義される．同様に,

(255)

が結合の順番によらないことを要請すると, $\alpha_{g_1g_2}(h) = \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(h))$ や $\alpha_g(h_1)\alpha_g(h_2) = \alpha_g(h_1h_2)$ を満たさなくてはならない (群準同型)．これらの関係を満たすものを pre-crossed module という．

H の元 h_1, h_2, h_1^{-1} の積について,

$$\begin{array}{c} t(h_2) \\ t(h_1) \\ t(h_2^{-1}) \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bullet h_2 \\ \hline \bullet h_1 \\ \hline \bullet h_2^{-1} \\ \hline \end{array} = t(h_2 h_1 h_2^{-1}) \begin{array}{|c|} \hline \bullet h_2 h_1 h_2^{-1} \\ \hline \end{array} \quad (256)$$

が成り立つが, トポロジカルな変形を許して結合の仕方を変えると

$$\begin{array}{c} t(h_2) \\ t(h_1) \\ t(h_2^{-1}) \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bullet h_2 \\ \hline \bullet h_1 \\ \hline \bullet h_2^{-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} t(h_2) \\ t(h_1) \\ t(h_2^{-1}) \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bullet h_2 \\ \hline \bullet h_1 \\ \hline \bullet h_2^{-1} \\ \hline \end{array} = t(\alpha_{t(h_2)}(h_1)) \begin{array}{|c|} \hline \bullet \alpha_{t(h_2)}(h_1) \\ \hline \end{array} \quad (257)$$

のようになる. 2 群は, この結合の順番によらないことを要請する: $\alpha_{t(h_2)}(h_1) = h_2 h_1 h_2^{-1}$ (Peiffer identity).

これらをまとめると 2 群は (G, H, t, α) の組で G, H は群, $t: H \rightarrow G$ の準同型, $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ の群準同型で以下の性質を満たすものである:

G equivalent すべての G の元 g および, H の元 h について, $t(\alpha_g(h)) = gt(h)g^{-1}$ を満たす.

Peiffer identity すべての G の元 g および, H の元 h_1, h_2 について, $\alpha_{t(h_2)}(h_1) = h_2 h_1 h_2^{-1}$ を満たす.

本文に出てきた 1 次対称性は, t が自明な場合であるが, Peiffer identity $\alpha_e(h_1) = h_2 h_1 h_2^{-1}$ がすべての h_2 について成り立つので, H は可換群となる.

Cluster Hamiltonian について見てみよう. 0 次対称性は, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ で, 演算子は, (198) 式で定義された U_σ, U_τ に単位元及び, $U_\sigma U_\tau$ を加えた 4 つからなる. これらに対応した G の元を g_e を単位元として, $g_e, g_\sigma, g_\tau, g_{\sigma\tau}$ と書く. すべての元は可換で, $g_\sigma^2 = g_\tau^2 = g_{\sigma\tau}^2 = g_e$ 及び $g_\sigma g_\tau = g_{\sigma\tau}$ を満たす. 具体的には $g_e = 1, g_\sigma = \sigma^x, g_\tau = \tau^x, g_{\sigma\tau} = \sigma^x \tau^x$ で表現できる.

また, cluster Hamiltonian は端のある演算子 $A_{n,m}, B_{m,n}$ と可換であった. これらの線に G の元を, 端に H の元を対応させることを考える. $A_{m,n}, B_{m,n}$ の右端のセルについて見てみると, $\sigma_n^x \tau_{n+1/2}^z =: h_\tau, \sigma_n^z =: h_\sigma$ となっている. この h_τ, h_σ とその積を用いて H の元を構成することができる. 結果は, 8 個の元 $\pm h_e = \pm 1, \pm h_\tau, \pm h_\sigma, \pm h_{\sigma\tau} := \pm h_\sigma h_\tau$ の 8 つの元からなる 2 面体群 D_8 となる. この群の元の掛け算表は表 2 のとおりである. H は, 短完全列 $1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ を満たす G の \mathbb{Z}_2 によって非自明に拡大された群となっている. t は, $A_{m,n}, B_{m,n}$ の線の部分の元を取り出す演算として定義する:

$$t(\pm h_e) = g_e, \quad t(\pm h_\sigma) = g_\tau, \quad t(\pm h_\tau) = g_\sigma, \quad t(\pm h_{\sigma\tau}) = g_{\sigma\tau}. \quad (258)$$

α は, G の H への作用で, G の元で H の元を囲んだ時の対称性変換で得られる:

$$\begin{aligned} \alpha_{g_\sigma}(\pm h_\sigma) &= \mp h_\sigma, & \alpha_{g_\sigma}(\pm h_{\sigma\tau}) &= \mp h_{\sigma\tau} \\ \alpha_{g_\tau}(\pm h_\tau) &= \mp h_\tau, & \alpha_{g_\tau}(\pm h_{\sigma\tau}) &= \mp h_{\sigma\tau}, \\ \alpha_{g_{\sigma\tau}}(\pm h_\sigma) &= \mp h_\sigma, & \alpha_{g_{\sigma\tau}}(\pm h_\tau) &= \mp h_\tau. \end{aligned} \quad (259)$$

他の作用は自明である. cluster Hamiltonian の $A_{m,n}, B_{m,n}$ は, 空間方向の変形に対してトポロジカルであるわけではが 2 群の構造を持っていることがわかる.

○	h_e	h_σ	h_τ	$h_{\sigma\tau}$	$-h_e$	$-h_\sigma$	$-h_\tau$	$-h_{\sigma\tau}$
h_e	h_e	h_σ	h_τ	$h_{\sigma\tau}$	$-h_e$	$-h_\sigma$	$-h_\tau$	$-h_{\sigma\tau}$
h_σ	h_σ	h_e	$h_{\sigma\tau}$	h_τ	$-h_\sigma$	$-h_e$	$-h_{\sigma\tau}$	$-h_\tau$
h_τ	h_τ	$-h_{\sigma\tau}$	h_e	$-h_\sigma$	$-h_\tau$	$h_{\sigma\tau}$	$-h_e$	h_σ
$h_{\sigma\tau}$	$h_{\sigma\tau}$	$-h_\tau$	h_σ	$-h_e$	$-h_{\sigma\tau}$	h_τ	$-h_\sigma$	h_e
$-h_e$	$-h_e$	$-h_\sigma$	$-h_\tau$	$-h_{\sigma\tau}$	h_e	h_σ	h_τ	$h_{\sigma\tau}$
$-h_\sigma$	$-h_\sigma$	$-h_e$	$-h_{\sigma\tau}$	$-h_\tau$	h_σ	h_e	$h_{\sigma\tau}$	h_τ
$-h_\tau$	$-h_\tau$	$h_{\sigma\tau}$	$-h_e$	h_σ	h_τ	$-h_{\sigma\tau}$	h_e	$-h_\sigma$
$-h_{\sigma\tau}$	$-h_{\sigma\tau}$	h_τ	$-h_\sigma$	h_e	$h_{\sigma\tau}$	$-h_\tau$	h_σ	$-h_e$

表 2: H の元の掛け算表

D 磁場中の Weyl フェルミオンとカイラル磁気効果

本節では、磁場中の Weyl フェルミオンの運動方程式を解くことでカイラル磁気効果を導出してみよう。右巻き Weyl フェルミオンの作用は、

$$S = \int d^4x \xi^\dagger \sigma^\mu i D_\mu \xi \quad (260)$$

で与えられる。ここで、 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ 、および $\sigma^\mu = (1, \sigma)$ である。ここでは、 z 軸方向に磁場がかかっている場合を考え、ゲージ場は対称ゲージ $A_\mu = (0, -eBy/2, eBx/2, 0)$ を採用する ($eB > 0$ とする)。この時、ハミルトニアンは、

$$H = -i\sigma \cdot \mathbf{D} - A_0 = \begin{pmatrix} -i\partial_z & -iD_1 - D_2 \\ -iD_1 + D_2 & i\partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_z & i\sqrt{2eB}a^\dagger \\ -i\sqrt{2eB}a & i\partial_z \end{pmatrix} \quad (261)$$

と書ける。ここで $a = (D_1 + iD_2)/\sqrt{2eB}$ と定義した。これは、 $[a, a^\dagger] = 1$ の交換関係を満たす。ハミルトニアンの 2 乗を取ると、

$$H^2 = \begin{pmatrix} -\partial_z^2 + 2eBa^\dagger a & 0 \\ 0 & -\partial_z^2 + 2eBaa^\dagger \end{pmatrix} \quad (262)$$

となるので、固有エネルギーは $a^\dagger a$ の固有値 n を用いて、 $E_n^2 = p_z^2 + 2eBn$ となり、量子化されていることがわかる (Landau 量子化)。波動関数を求めるため、以下の量を導入しよう:

$$\xi := \sqrt{\frac{eB}{2}}(x + iy), \quad \bar{\xi} := \sqrt{\frac{eB}{2}}(x - iy), \quad (263)$$

$$\partial := \frac{\partial}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{1}{2eB}}(\partial_x - i\partial_y), \quad \bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \sqrt{\frac{1}{2eB}}(\partial_x + i\partial_y). \quad (264)$$

すると a, a^\dagger は

$$a = \bar{\partial} + \frac{1}{2}\xi, \quad a^\dagger = -\partial + \frac{1}{2}\bar{\xi} \quad (265)$$

と表せる。この a, a^\dagger は、以下の b, b^\dagger ($[b, b^\dagger] = 1$) と可換である:

$$b = \partial + \frac{\bar{\xi}}{2}, \quad b^\dagger = -\bar{\partial} + \frac{\xi}{2}. \quad (266)$$

従って, b, b^\dagger はハミルトニアンと可換であることがわかる. z 軸方向の角運動量を $J_z = L_z + \sigma_3/2$ としよう. ここで L_z は軌道角運動量で

$$L_z = -ix\partial_y + iy\partial_x = b^\dagger b - a^\dagger a \quad (267)$$

と定義される. この角運動量 J_z はハミルトニアンと可換である. 状態は, $a^\dagger a$ 及び, $L_z = b^\dagger b - a^\dagger a$ の固有状態 (n, l) を用いると便利である:

$$|n, l\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \frac{1}{\sqrt{(n+l)!}} (b^\dagger)^{n+l} |0, 0\rangle. \quad (268)$$

構成の仕方から, $l = -n, \dots, \infty$ を動く. スピノールまで含めた正エネルギーの波動関数は,

$$|n, l, p_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_n + p_z} \\ -ia\sqrt{\frac{2eB}{E_n + p_z}} \end{pmatrix} |n, l\rangle \quad (269)$$

と書ける²¹. この波動関数は, J_z の固有状態で固有値は $l + 1/2$ である. これがハミルトニアンの固有状態になっていることは具体的に固有値方程式に代入してみれば確かめられる. 同様の手順で負エネルギー解も求められる.

さて波動関数が求まったので, カイラル磁気効果を見てみよう. カレントを求めるためにまず $\langle n, l, p_z, \sigma_z | n, l, p_z \rangle$ を評価しよう. これは,

$$\begin{aligned} \langle n, l, p_z, \sigma_z | n, l, p_z \rangle &= \frac{1}{2E_n} \langle n, l | \left(\sqrt{E_n + p_z} \quad ia^\dagger \sqrt{\frac{2eB}{E_n + p_z}} \right) \sigma_z \begin{pmatrix} \sqrt{E_n + p_z} \\ -ia\sqrt{\frac{2eB}{E_n + p_z}} \end{pmatrix} |n, l\rangle \\ &= \frac{1}{2E_n} \left(E_n + p_z - \frac{2eBn}{E_n + p_z} \right) \end{aligned} \quad (270)$$

となる. カイラル磁気効果が $n = 0$ の最低 Landau 準位からの寄与であることを見るために $n = 0$ の $n \neq 0$ の寄与を別々に考えよう. まず, $n = 0$ を考える. $n = 0$ を代入することで

$$\langle 0, l, p_z | \sigma_z | 0, l, p_z \rangle = \frac{1}{2|p_z|} (|p_z| + p_z) = \theta(p_z) \quad (271)$$

が得られる. ここで $\theta(p_z)$ は階段関数で,

$$\theta(p_z) = \begin{cases} 1 & p_z > 0 \\ 0 & p_z < 0 \end{cases} \quad (272)$$

である. $n \neq 0$ については,

$$\langle n, l, p_z | \sigma_z | n, l, p_z \rangle = \frac{p_z}{E_n} \quad (273)$$

が得られる. 全カレントは, 反粒子の寄与も考慮して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int d^3x \langle J_z(x) \rangle &= \frac{1}{V} \int d^3x \langle \xi^\dagger(x) \sigma_z \xi(x) \rangle \\ &= + \frac{1}{V_\perp} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{2\pi} \theta(p_z) (n_F(|p_z| - \mu) - n_F(|p_z| + \mu)) \\ &\quad + \frac{1}{V_\perp} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^{\infty} \int \frac{dp_z}{2\pi} \frac{p_z}{2E_n} (n_F(E_n - \mu) - n_F(E_n + \mu)) \end{aligned} \quad (274)$$

²¹ここでは, 非相対論的な規格化 $u^\dagger u = 1$ を用いている.

となる． $n_F(x)$ は Fermi-Dirac 分布関数で，逆温度 $\beta = 1/T$ を用いて，

$$n_F(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1} \quad (275)$$

と定義されている． $n \neq 0$ の項は， p_z に対して奇関数なので，運動量の積分で消えてしまう．また， l の和が

$$\frac{1}{V_\perp} \sum_{l=0}^{\infty} = \frac{eB}{2\pi} \quad (276)$$

であることに注意²²すると，最終的にカイラル磁気効果

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int d^3x \langle J_z(x) \rangle &= \frac{eB}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dp_z}{2\pi} \left(n_F(|p_z| - \mu) - n_F(|p_z| + \mu) \right) \\ &= \frac{eB}{2\pi} \frac{1}{2\pi} T \left[-\ln(1 + e^{-\beta(p_z - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(p_z + \mu)}) \right]_0^\infty \\ &= \frac{eB}{2\pi} \frac{1}{2\pi} T (\ln(1 + e^{\beta\mu}) - \ln(1 + e^{-\beta\mu})) \\ &= \frac{eB}{4\pi^2} \mu \end{aligned} \quad (277)$$

が得られる．これよりカイラル磁気効果は温度によらず，磁場の高次の奇与もないことがわかる．

参考文献

- [1] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, *JHEP* **02**, 172 (2015), 1412.5148.
- [2] Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [4] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
- [5] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [6] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996).
- [7] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Adv. Part. Phys.* **2**, 567 (1968).
- [8] H. B. Nielsen and S. Chadha, *Nucl. Phys.* **B105**, 445 (1976).
- [9] T. Schafer, D. T. Son, M. A. Stephanov, D. Toublan, and J. J. M. Verbaarschot, *Phys. Lett.* **B522**, 67 (2001), hep-ph/0108210.
- [10] Y. Nambu, *J. Stat. Phys.* **115**, 7 (2004).
- [11] H. Watanabe and T. Brauner, *Phys. Rev. D* **84**, 125013 (2011), 1109.6327.

²²この関係式は，具体的に座標空間または運動量空間での波動関数を用いることで導出することができる。

- [12] H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **108**, 251602 (2012), 1203.0609.
- [13] Y. Hidaka, Phys. Rev. Lett. **110**, 091601 (2013), 1203.1494.
- [14] A. Nicolis and F. Piazza, JHEP **1206**, 025 (2012), 1112.5174.
- [15] A. Nicolis and F. Piazza, Phys. Rev. Lett. **110**, 011602 (2013), 1204.1570.
- [16] H. Watanabe, T. Brauner, and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **111**, 021601 (2013), 1303.1527.
- [17] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33**, 423 (1965).
- [18] 森肇, 臨界現象の理論, 1973年度物性若手夏の学校における全体講義の講義ノート.
- [19] T. Hayata and Y. Hidaka, Phys. Rev. D **91**, 056006 (2015), 1406.6271.
- [20] M. Gell-Mann, R. Oakes, and B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
- [21] S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969).
- [22] J. Callan, Curtis G., S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969).
- [23] 九後汰一郎, ゲージ場の量子論 II (培風館, 1989).
- [24] H. Leutwyler, Phys. Rev. D **49**, 3033 (1994), hep-ph/9311264.
- [25] D. M. Hofman and N. Iqbal, SciPost Phys. **6**, 006 (2019), 1802.09512.
- [26] E. Lake, (2018), 1802.07747.
- [27] R. Ferrari and L. Picasso, Nucl. Phys. **B31**, 316 (1971).
- [28] R. A. Brandt and W.-C. Ng, Phys. Rev. D **10**, 4198 (1974).
- [29] H. Hata, Prog. Theor. Phys. **69**, 1524 (1983).
- [30] T. Kugo, H. Terao, and S. Uehara, Prog. Theor. Phys. Suppl. **85**, 122 (1985).
- [31] N. Yamamoto, Phys. Rev. D **93**, 085036 (2016), 1512.05668.
- [32] S. Ozaki and N. Yamamoto, JHEP **08**, 098 (2017), 1610.07835.
- [33] N. Sogabe and N. Yamamoto, Phys. Rev. D **99**, 125003 (2019), 1903.02846.
- [34] N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [35] S. R. Coleman, Commun. Math. Phys. **31**, 259 (1973).
- [36] M. Kobayashi and M. Nitta, Phys. Rev. Lett. **113**, 120403 (2014), 1402.6826.
- [37] I. Low and A. V. Manohar, Phys. Rev. Lett. **88**, 101602 (2002), hep-th/0110285.

- [38] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D 22**, 3080 (1980).
- [39] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, Phys. Rev. **D 78**, 074033 (2008), 0808.3382.
- [40] S. Elitzur, Y. Frishman, E. Rabinovici, and A. Schwimmer, Nucl. Phys. **B273**, 93 (1986).
- [41] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. **130B**, 389 (1983).
- [42] D. T. Son and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. **D 70**, 074018 (2004), hep-ph/0405216.
- [43] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. **D 72**, 045011 (2005), hep-ph/0505072.
- [44] Z.-C. Gu and X.-G. Wen, Phys. Rev. **B 80**, 155131 (2009), 0903.1069.
- [45] F. Pollmann, E. Berg, A. M. Turner, and M. Oshikawa, Phys. Rev. **B 85**, 075125 (2012), 0909.4059.
- [46] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, and X.-G. Wen, Phys. Rev. **B 87**, 155114 (2013), 1106.4772.
- [47] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, and X.-G. Wen, Science **338**, 1604 (2012), 1301.0861.
- [48] W. Son, L. Amico, and V. Vedral, Quantum Inf Process **11**, 1961 (2012), 1111.7173.
- [49] X. Chen, Y.-M. Lu, and A. Vishwanath, Nat. Commun. **5**, 3507 (2014), 1303.4301.
- [50] X. G. Wen, Int. J. Mod. Phys. **B4**, 239 (1990).
- [51] A. Kitaev, Annals Phys. **321**, 2 (2006), cond-mat/0506438.
- [52] Z. Nussinov and G. Ortiz, Annals Phys. **324**, 977 (2009), cond-mat/0702377.
- [53] X.-G. Wen, Adv. Phys. **44**, 405 (1995), cond-mat/9506066.
- [54] H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **110**, 181601 (2013), 1302.4800.
- [55] T. Hayata and Y. Hidaka, Phys. Lett. **B735**, 195 (2014), 1312.0008.
- [56] D. V. Volkov, Sov. J. Part. Nucl. **4**, 3 (1973).
- [57] E. Ivanov and V. Ogievetsky, Teor. Mat. Fiz. **25**, 164 (1975).
- [58] V. I. Ogievetsky, Proc. of X-th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz **1**, 117 (1974).
- [59] A. Nicolis, R. Penco, F. Piazza, and R. A. Rosen, JHEP **11**, 055 (2013), 1306.1240.
- [60] T. Brauner and H. Watanabe, Phys. Rev. **D 89**, 085004 (2014), 1401.5596.
- [61] Y. Hidaka, T. Noumi, and G. Shiu, Phys. Rev. **D 92**, 045020 (2015), 1412.5601.

- [62] I. Kharuk and A. Shkerin, Phys. Rev. **D 98**, 125016 (2018), 1803.10729.
- [63] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Second Edition* (Butterworth Heinemann, Oxford, UK, 1987).
- [64] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, 2000).
- [65] D. Volkov and V. Akulov, Phys. Lett. **B46**, 109 (1973).
- [66] A. Salam and J. Strathdee, Phys. Lett. **B49**, 465 (1974).
- [67] Y. Yu and K. Yang, Phys. Rev. Lett. **100**, 090404 (2008), 0707.4119.
- [68] T. Shi, Y. Yu, and C. P. Sun, Phys. Rev. **A 81**, 011604 (2010), 0909.3996.
- [69] Y. Yu and K. Yang, Phys. Rev. Lett. **105**, 150605 (2010), 1005.1399.
- [70] M. Snoek, S. Vandoren, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. **A 74**, 033607 (2006), cond-mat/0604671.
- [71] A. Capolupo and G. Vitiello, Adv. High Energy Phys. **2013**, 850395 (2013), 1311.4487.
- [72] J. He, J. Yu, X.-H. Zhang, and S.-P. Kou, (2012), 1210.3232.
- [73] J.-P. Blaizot, Y. Hidaka, and D. Satow, Phys. Rev. **A 92**, 063629 (2015), 1510.06525.
- [74] J.-P. Blaizot, Y. Hidaka, and D. Satow, Phys. Rev. **A 96**, 063617 (2017), 1707.05634.
- [75] H. Nicolai, J. Phys. A **9**, 1497 (1976).
- [76] N. Sannomiya, H. Katsura, and Y. Nakayama, Phys. Rev. **D 94**, 045014 (2016), 1606.03947.
- [77] N. Sannomiya, H. Katsura, and Y. Nakayama, Phys. Rev. **D 95**, 065001 (2017), 1612.02285.
- [78] N. Sannomiya and H. Katsura, Phys. Rev. **D 99**, 045002 (2019), 1712.01148.
- [79] L. M. Sieberer, M. Buchhold, and S. Diehl, Rept. Prog. Phys. **79**, 096001 (2016), 1512.00637.
- [80] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [81] H. Watanabe and M. Oshikawa, Phys. Rev. Lett. **114**, 251603 (2015), 1410.2143.
- [82] T. Hayata and Y. Hidaka, (2018), 1808.07636.
- [83] M. Hongo, S. Kim, T. Noumi, and A. Ota, JHEP **02**, 131 (2019), 1805.06240.
- [84] J. Toner and Y. Tu, Phys. Rev. **E 58**, 4828 (1998), cond-mat/9804180.

- [85] J. Toner and Y. Tu, Phys. Rev. Lett. **75**, 4326 (1995), adap-org/9506001.
- [86] Y. Minami and Y. Hidaka, Phys. Rev. **E 97**, 012130 (2018), 1509.05042.
- [87] Y. Hidaka and Y. Minami, (2019), 1907.08241.
- [88] M. Hongo, S. Kim, T. Noumi, and A. Ota, (2019), 1907.08609.