

不安定状態における 弱束縛関係式のレンジ補正



衣川 友那 兵藤 哲雄



Department of Physics, Tokyo Metropolitan University
August 7th 2021 原子核三者若手夏の学校

自己紹介

衣川 友那 (きぬがわ ともな)

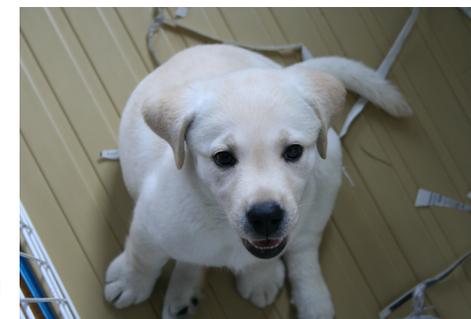


所属: 東京都立大学 理学研究科 原子核ハドロン物理研究室

学年: M2

研究内容: 弱束縛関係式の特徴と改良について調べること
(これから話します)

その他: 低エネルギー普遍性について興味があります
色々とまだ勉強中です



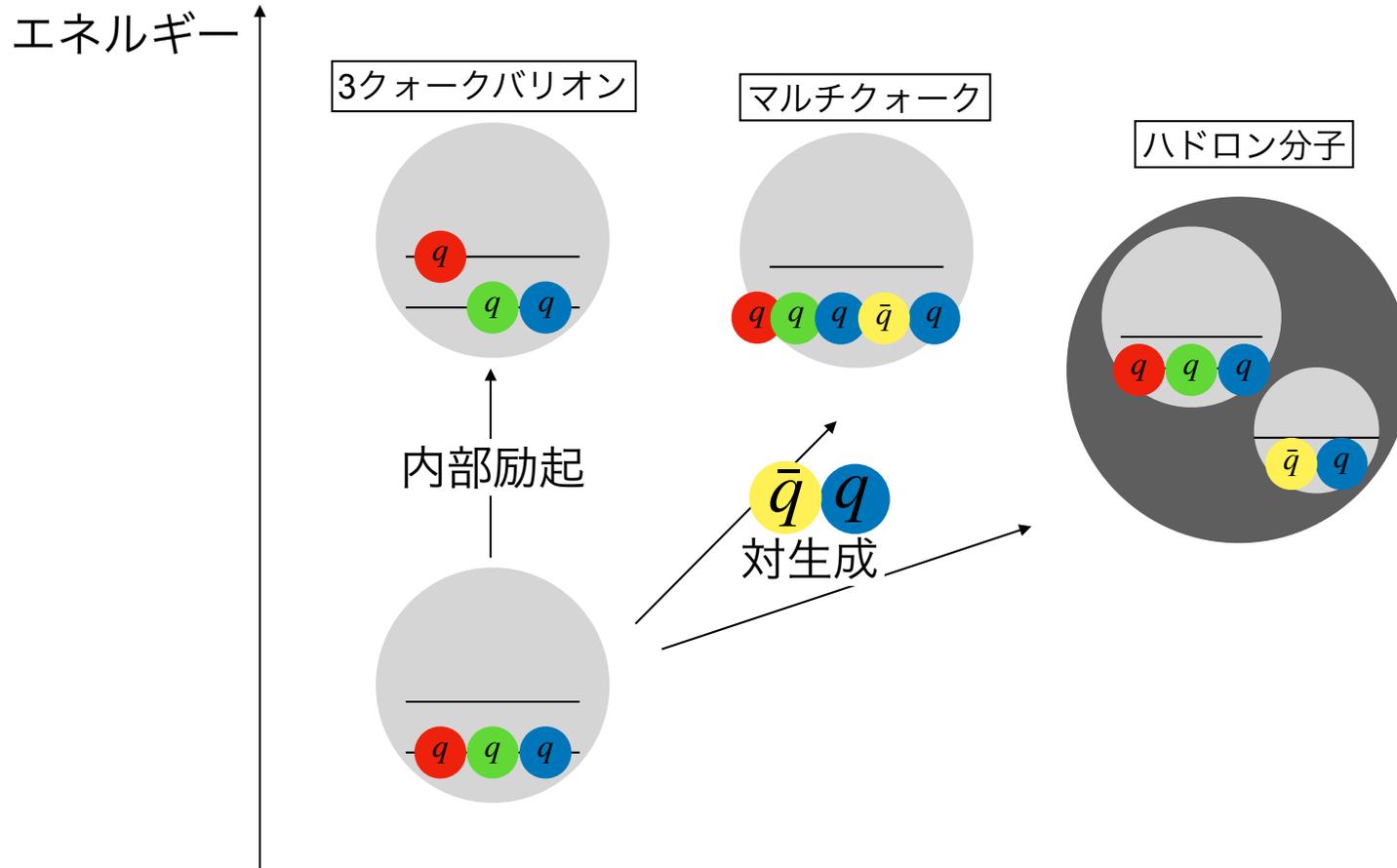
2 犬 (zoomの顔)

背景

エキゾチックハドロンの候補
 $\Lambda(1405)$, XYZ メソン など



マルチクォーク状態
ハドロン分子状態



ハドロンの内部構造

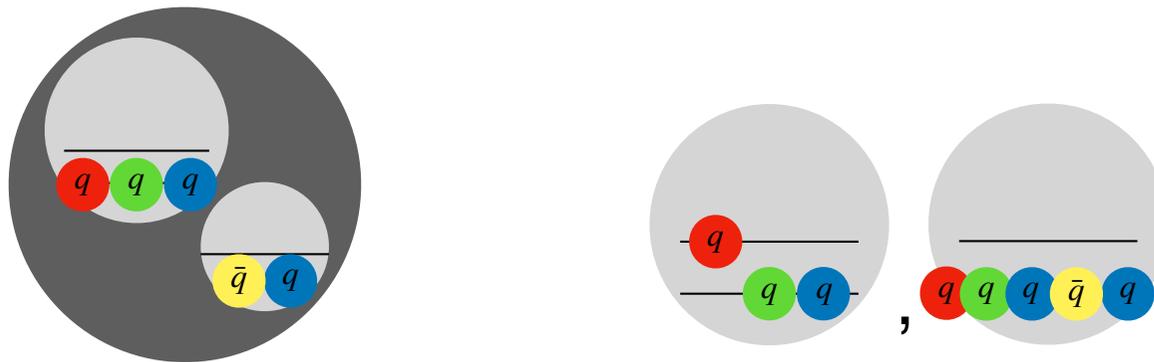
モデル非依存な手段



観測量

先行研究

ハドロンの波動関数



$$|\Psi\rangle = \sqrt{X} |\text{hadronic molecule}\rangle + \sqrt{1-X} |\text{others}\rangle$$

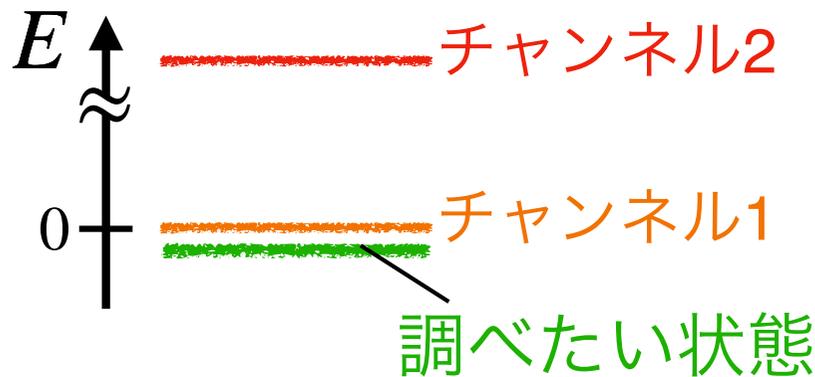
複合性(ハドロン分子状態の重み)

弱束縛関係式

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

a_0 (散乱長) $R \equiv (2\mu B)^{-1/2}$, B (束縛エネルギー)

R_{typ} (相互作用長さ)



$R \gg R_{\text{typ}}$ のとき: 観測量(a_0, B) \longrightarrow 複合性(X)

S. Weinberg, Phys. Rev. 137, B672 (1965); Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP 2017, 023D02 (2017).

動機

$$\text{弱束縛関係式} \quad a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

低エネルギー一般性 $\rightarrow a_0 = R \ (R \rightarrow \infty)$

-他のチャンネルの寄与によるズレ $\leftarrow X \neq 1$

-相互作用長さによるズレ $\leftarrow R_{\text{typ}} \neq 0$

\rightarrow 有効レンジ r_e の導入による弱束縛関係式のレンジ補正
を考える

質量 m の同種ボソンの散乱:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4}\lambda_0(\psi^\dagger\psi)^2 + \frac{1}{4}\rho_0\nabla(\psi^\dagger\psi)\cdot\nabla(\psi^\dagger\psi)$$

Off-shell T行列:

$$T(E, k, k') = T_1(E) + T_2(E)(k^2 + k'^2) + T_3(E)k^2k'^2,$$

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \lambda_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{i}{E - q^2/m + i0^+} & \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{iq^2}{E - q^2/m + i0^+} \\ \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{iq^2}{E - q^2/m + i0^+} & \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{iq^4}{E - q^2/m + i0^+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix}.$$

cut off at Λ

Typical range $R_{\text{typ}} \sim 1/\Lambda$

On-shell 散乱振幅:

$$f(k) = \left[-\frac{8\pi}{m} \frac{\left(1 + \frac{m}{12\pi^2}\Lambda^3\rho_0\right)^2}{N(k)} - \frac{2}{\pi}\Lambda - ik \right]^{-1}, \quad N(k) = \left[\lambda_0 - \frac{m}{20\pi^2}\Lambda^5\rho_0^2 \right] + 2\rho_0 \left(\frac{m}{24\pi^2}\Lambda^3\rho_0 + 1 \right) k^2.$$

有効レンジモデル

E. Braaten, M. Kusunoki, and D. Zhang, Annals Phys. 323, 1770 (2008), 0709.0499.

$f(k; \lambda_0, \rho_0, \Lambda)$ の低エネルギーでの振る舞いから散乱長 a_0 と有効レンジ r_e が得られる

→ $a_0 = a_0(\lambda_0, \rho_0, \Lambda), r_e = r_e(\lambda_0, \rho_0, \Lambda).$

a_0 と r_e はベアパラメータと Λ の関数

くりこみ:

a_0 と r_e が Λ 非依存になるようにベアパラメータ λ_0, ρ_0 を Λ の関数にする

→
$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2} k^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) - ik \right]^{-1}$$
$$\rightarrow \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2} k^2 - ik \right]^{-1} \quad (\Lambda \rightarrow \infty)$$

Zero range limit

有効レンジモデル

有効レンジモデルの特徴(ゼロレンジ極限):

-1チャンネル: $|\text{hadronic molecule}\rangle$ のみ $\Leftrightarrow X = 1$

-ゼロレンジ極限: $\Lambda \rightarrow \infty \Leftrightarrow R_{\text{typ}} = 1/\Lambda \rightarrow 0$

$$\Rightarrow a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\} \rightarrow R ?$$

くりこまれた散乱振幅($\Lambda \rightarrow \infty$):

$$1/f(k = i/R) = 0$$

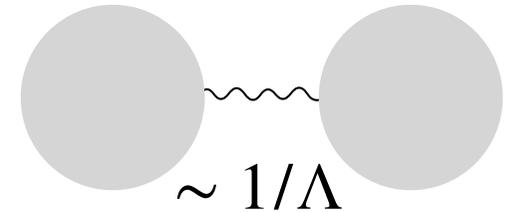
$$a_0 = R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R - 1)^2} = R \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{r_e}{R}\right|\right) \right] \Rightarrow a_0 \neq R$$

→ r_e による弱束縛関係式のレンジ補正

弱束縛関係式の改良

$$\text{弱束縛関係式} \quad a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

$$\text{相互作用長さ: } R_{\text{typ}} \longrightarrow R_{\text{int}} \sim 1/\Lambda$$



R_{typ} の再定義:

$$R_{\text{typ}} = \max \left\{ R_{\text{int}}, R_{\text{eff}} \right\},$$

$$R_{\text{eff}} = \max \left\{ |r_e|, \frac{|P_s|}{R^2}, \dots \right\}.$$

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - \frac{P_s}{4}k^4 + \dots - ik \right]^{-1}$$

a_0 以外の有効レンジ展開に現れる長さスケール

数値計算 その1

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

改良した弱束縛関係式が有用な範囲は?

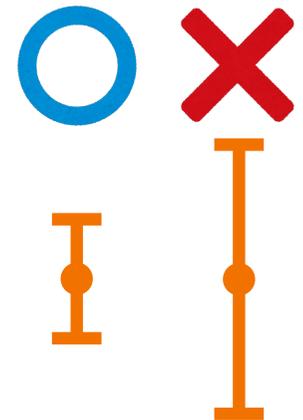
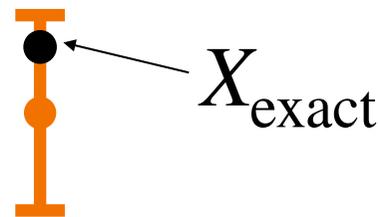
誤差項の見積もり ($\xi \equiv R_{\text{typ}}/R$): Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP 2017, 023D02 (2017).

中心値:
$$X_c = \frac{a_0/R}{2 - a_0/R},$$

$$X_{\text{upper}}(\xi) = \frac{a_0/R}{2 - a_0/R} + \xi, \quad X_{\text{lower}}(\xi) = \frac{a_0/R}{2 - a_0/R} - \xi.$$

弱束縛関係式が有用なのは...

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{\text{lower}} < X_{\text{exact}} < X_{\text{upper}} \\ \longrightarrow \text{正確さの条件} \\ (X_{\text{upper}} - X_c)/X_c < 0.1 \text{ and } (X_c - X_{\text{lower}})/X_c < 0.1 \\ \longrightarrow \text{精密さの条件} \end{array} \right.$$



数値計算 その1

有効レンジモデル ($\Lambda < \infty$)

$$f(k; \lambda_0, \rho_0, \Lambda) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 + \mathcal{O}(R_{\text{int}}) - ik \right]^{-1} (r_e \text{ と } R_{\text{int}} \text{ の2つの長さスケール})$$

$$1/f(k = i/R) = 0$$

- $r_e \neq 0$ (レンジ補正): $\xi_{r_e} = |r_e/R| \rightarrow r_e$ による誤差

$r_e < 0$ (有効レンジモデル)

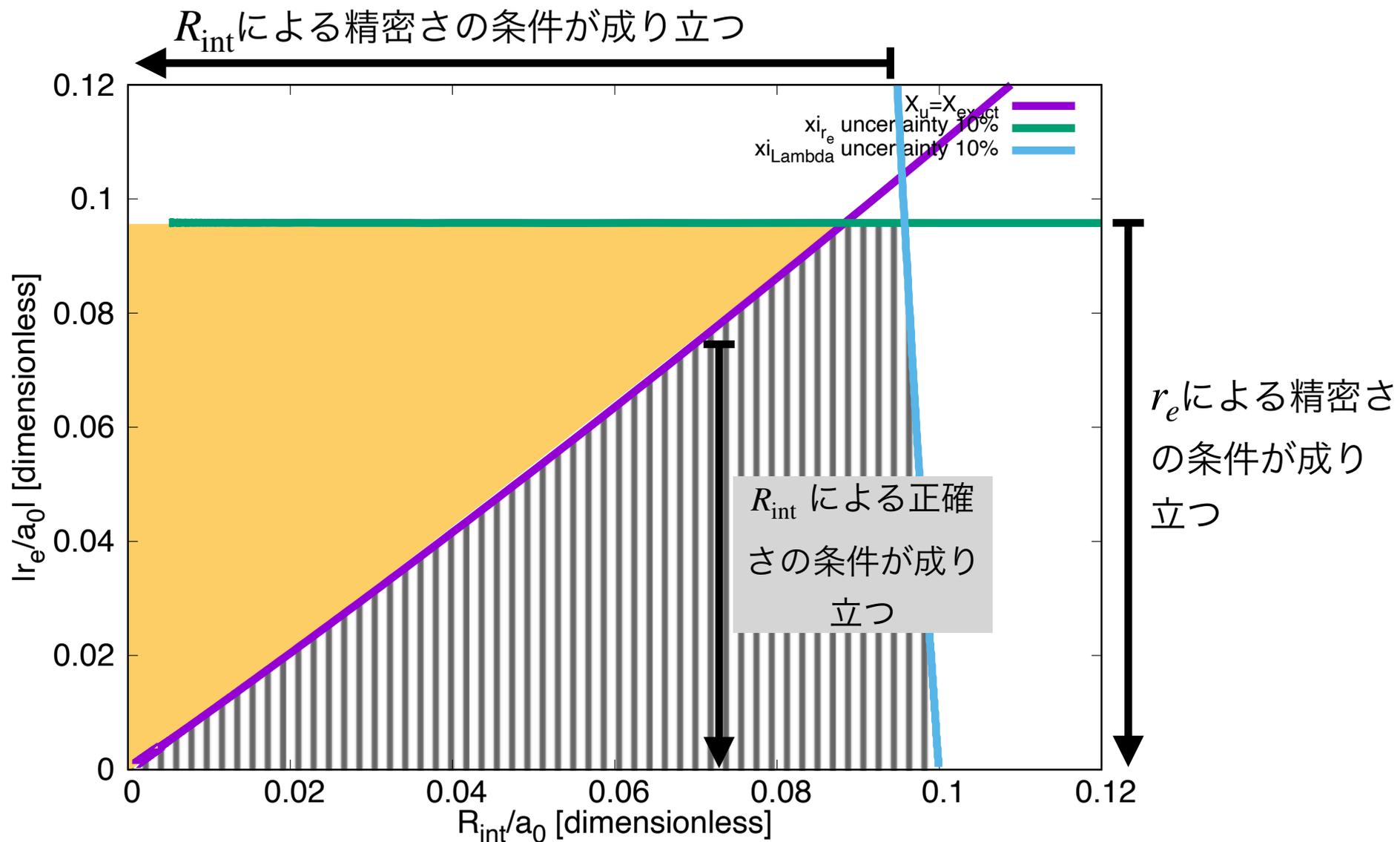
- $R_{\text{int}} = 1/\Lambda \neq 0$: $\xi_{\text{int}} = R_{\text{int}}/R. \rightarrow R_{\text{int}}$ による誤差

- $X_{\text{exact}} = 1$

\rightarrow 精密さと正確さの2つの条件が成り立つ r_e と R_{int} の領域を探す

数値計算 その1

$R_{int}/a_0 - |r_e/a_0|$ 平面での正確さと精密さの条件のplot



改良した弱束縛関係式のみが有用な領域があった

数値計算 その2

弱束縛関係式の中心値への改良の影響は?

従来の弱束縛関係式:

$$X(a_0, R) = \frac{a_0}{2R - a_0} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{int}}}{R}\right) \right].$$



束縛状態の条件

$$X(r_e, R) = \frac{R}{R - r_e} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{int}}}{R}\right) \right]$$

Y. Kamiya and T. Hyodo,
PTEP 2017, 023D02 (2017).



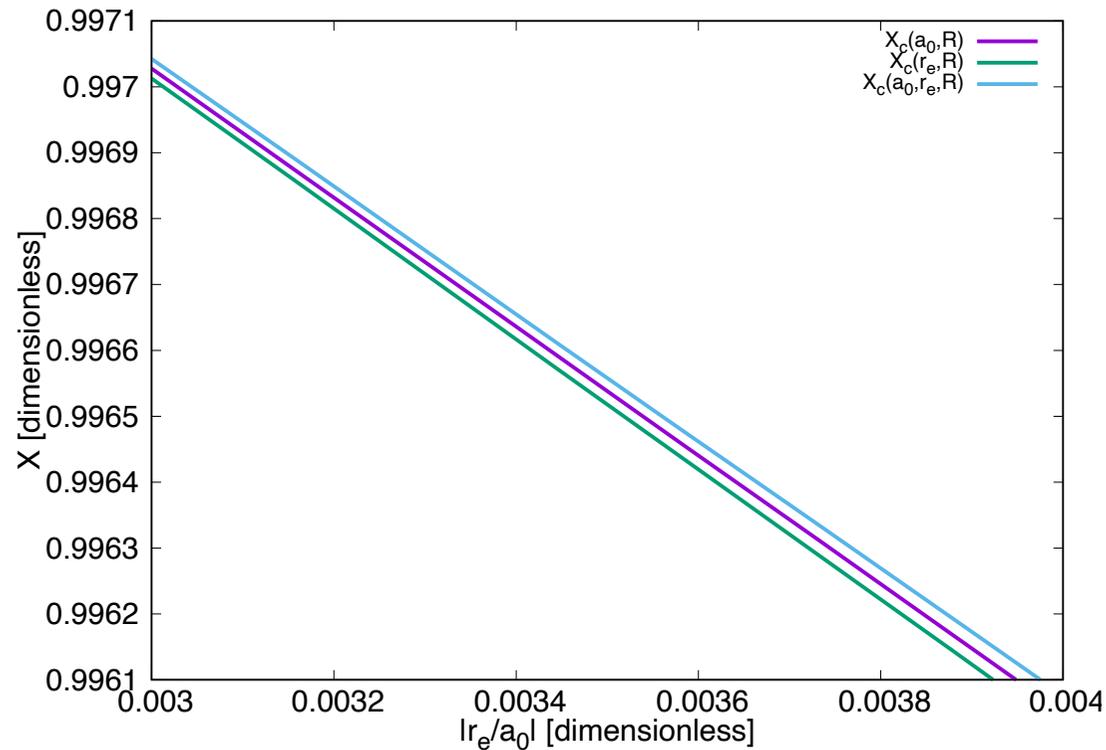
有効レンジ展開の高次項

$$X(a_0, r_e, R) = \left[\frac{4R}{a_0} + \frac{r_e}{R} - 3 + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{int}}}{R}\right) \right]^{-1}$$

有効レンジ模型($\Lambda < \infty$)での数値計算

数値計算 その2

$|r_e/a_0|$ の関数としての X_c の plot ($\Lambda = 1.1/a_0$)



X_c の間には数値的な違いはほとんどない

➡ 弱束縛関係式を中心値の改良は従来のもの比べて

$R_{\text{int}}/a_0 - |r_e/a_0|$ 平面での適用範囲を広げない

不安定状態への拡張

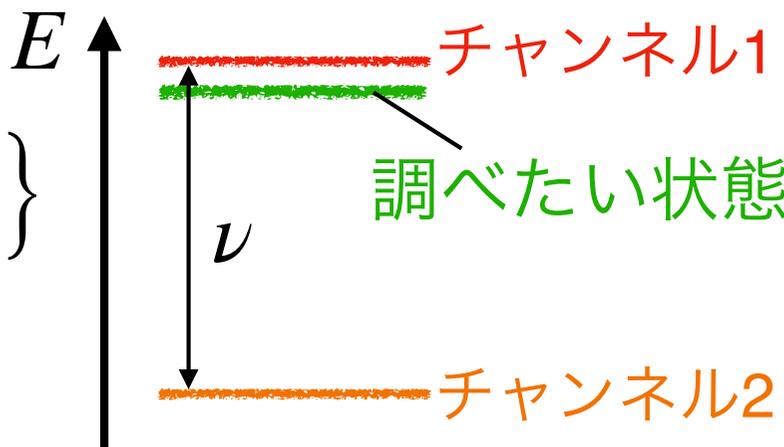
観測されるエキゾチックハドロン候補は不安定状態

不安定状態の時

→ 固有エネルギー, 散乱長, 有効レンジ $\in \mathbb{C}$

不安定状態の弱束縛関係式

Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP 2017, 023D02 (2017).

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) + \mathcal{O}\left(\left|\frac{l}{R}\right|^3\right) \right\}$$


$l \equiv (2\mu\nu)^{-1/2}, \nu$ (閾値のエネルギー差)

$R \gg R_{\text{typ}}$ かつ $R \gg l$ のとき: 観測量(a_0, B) → 複合性(X)

→ 不安定状態を記述する弱束縛関係式のレンジ補正は？

不安定状態への拡張 数値計算

誤差項の見積もり

Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP 2017, 023D02 (2017).

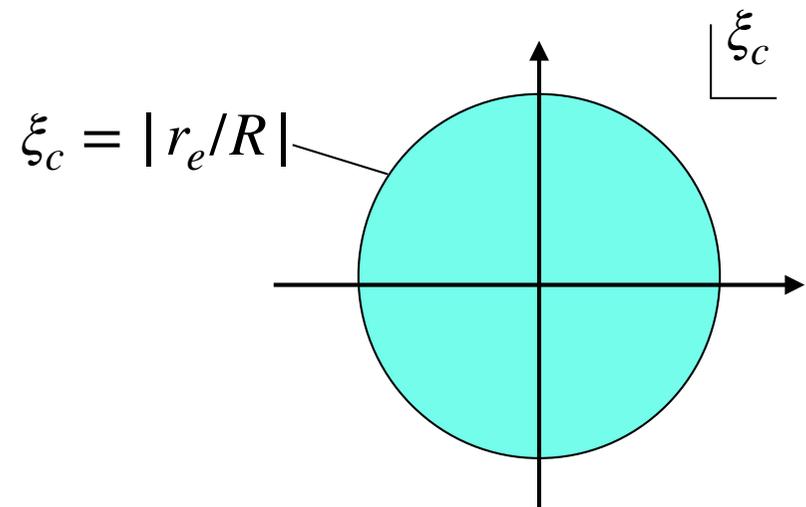
$$X \text{ の実数化: } \tilde{X} \equiv \frac{1 - |1 - X| + |X|}{2} \quad \because X \in \mathbb{C} \text{ (定義)}$$

$\tilde{X}_{\text{upper}}, \tilde{X}_{\text{lower}}$ の決め方

$$X = \frac{a_0/R + \xi_c}{2 - a_0/R - \xi_c}, \quad \xi_c \equiv |R_{\text{typ}}/R| = |r_e/R|. \quad \longrightarrow \tilde{X}$$

$\xi_c \leq |r_e/R|$ の領域で \tilde{X} の最大値と
最小値を探す

$\longrightarrow \tilde{X}_u, \tilde{X}_l$



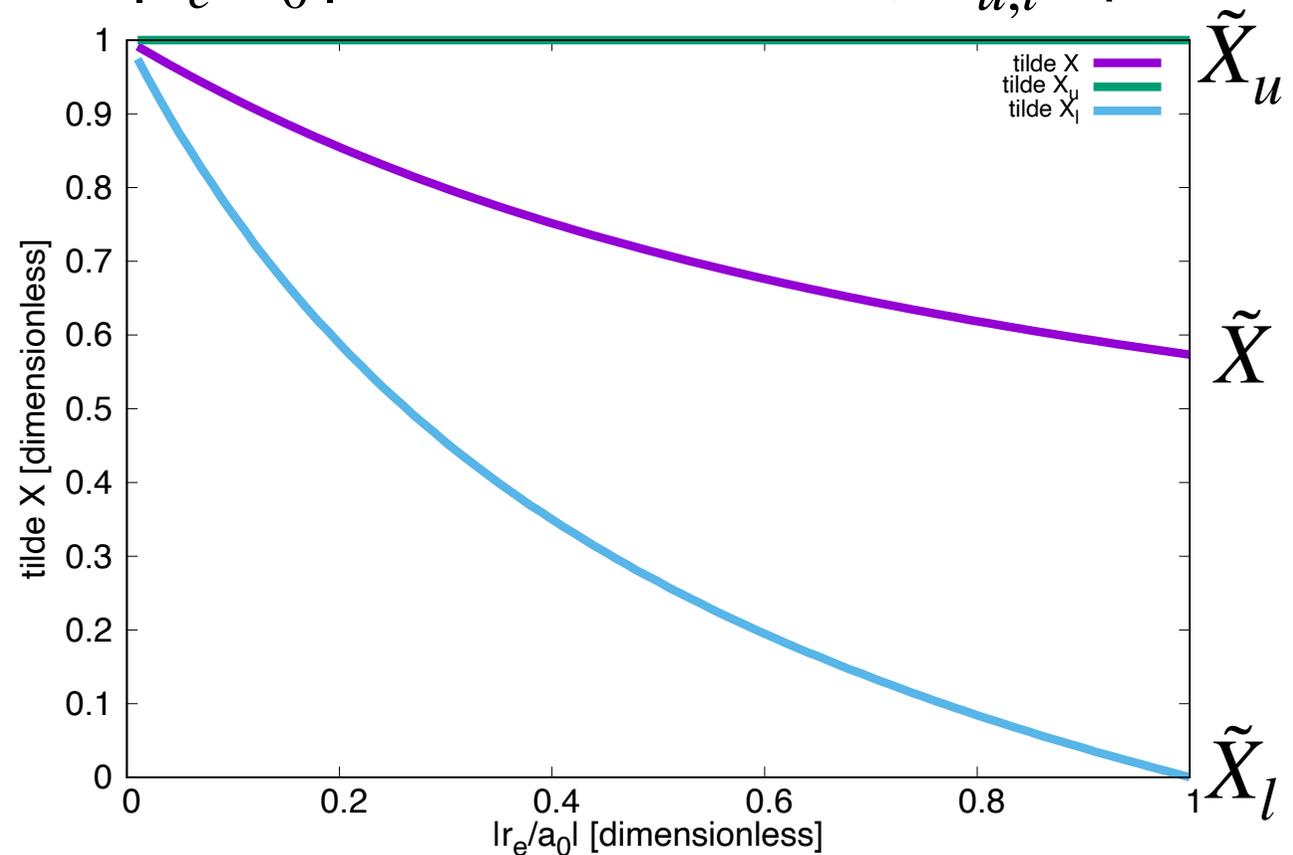
不安定状態への拡張

有効レンジモデル ($\Lambda \rightarrow \infty \Leftrightarrow R_{\text{int}} \rightarrow 0$)

$$f(k) = \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - ik \right]^{-1}$$

(長さスケール r_e のみ)

$|r_e/a_0|$ の関数としての \tilde{X} , $\tilde{X}_{u,l}$ の plot



これからやること:

有効レンジモデル ($\Lambda < \infty$) で正確さと精密さの条件を調べ、改良の妥当性を議論する

結論と今後の見通し

- 弱束縛関係式: 観測量  複合性(X)

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

- r_e による弱束縛関係式のレンジ補正

- R_{typ} の再定義による弱束縛関係式の改良:

$$R_{\text{typ}} = \max \left\{ R_{\text{int}}, R_{\text{eff}} \right\}, \quad R_{\text{eff}} = \max \{ |r_e|, \dots \}$$

- 数値計算: 有効レンジモデル ($\Lambda < \infty$)

 改良した弱束縛関係式のみが有用な範囲が存在
中心値への改良は適用範囲を広げない

- 改良した弱束縛関係式を実際のハドロン系に応用