

# レンジ補正を考慮した 弱束縛関係式の応用



**Tomona Kinugawa**



**Tetsuo Hyodo**

Department of Physics, Tokyo Metropolitan University  
March 17th JPS 2022 spring

# 背景

エキゾチックハドロンの候補

$\Lambda(1405)$ ,  $XYZ$ メソン など



マルチクォーク状態

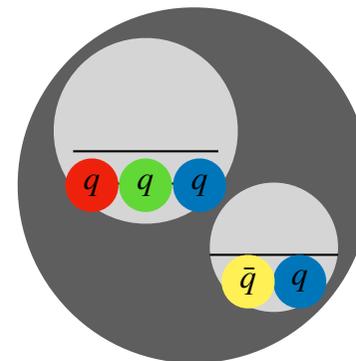
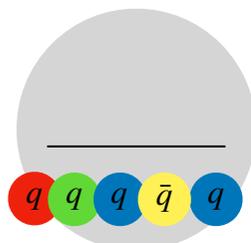
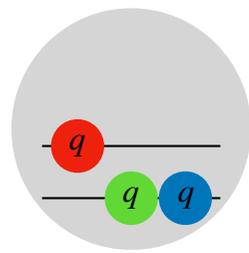
ハドロン分子状態

エネルギー ↑

3クォークバリオン

マルチクォーク

ハドロン分子



内部励起

$\bar{q} q$   
対生成

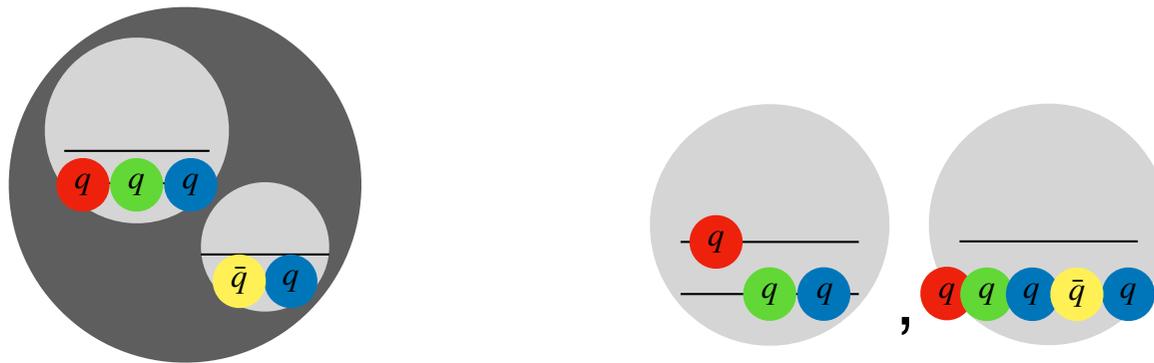
ハドロンの内部構造

モデル非依存な手段

観測量

# 先行研究

ハドロンの波動関数

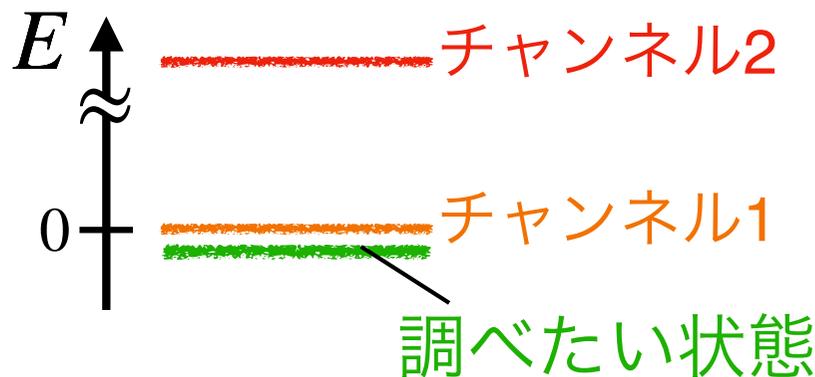


$$|\Psi\rangle = \sqrt{X} |\text{hadronic molecule}\rangle + \sqrt{1-X} |\text{others}\rangle$$

複合性(ハドロン分子状態の重み)

## 弱束縛関係式

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$



$a_0$  (散乱長)  $R \equiv (2\mu B)^{-1/2}$ ,  $B$  (束縛エネルギー)

$R_{\text{typ}}$  (相互作用長さ)

$R \gg R_{\text{typ}}$  のとき: 観測量( $a_0, B$ )  $\longrightarrow$  複合性( $X$ )

S. Weinberg, Phys. Rev. 137, B672 (1965); Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP 2017, 023D02 (2017).

**動機** 低エネルギー普遍性  $\rightarrow R = a_0$

$\rightarrow$  有効レンジ  $r_e$  の導入による弱束縛関係式の **レンジ補正** ?

## 弱束縛関係式のレンジ補正

T. Kinugawa, T. Hyodo, (2021), arXiv:2111.06619

ゼロレンジの有効レンジモデルの特徴:  $a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$

-1チャンネル:  $|\Psi\rangle = |\text{hadronic molecule}\rangle \Leftrightarrow X = 1$

-相互作用が点状 (ゼロレンジ) :  $R_{\text{typ}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow a_0 = R ?$

くりこまれた散乱振幅 ( $R_{\text{int}} \rightarrow 0$ ):

E. Braaten, M. Kusunoki, and D. Zhang, Annals Phys. 323, 1770 (2008), 0709.0499.

$$a_0 = R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R - 1)^2} = R \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{r_e}{R}\right|\right) \right] \Rightarrow a_0 \neq R !$$

$\rightarrow$   $r_e$  による弱束縛関係式の **レンジ補正**

# 弱束縛関係式のレンジ補正

T. Kinugawa, T. Hyodo, (2021),

arXiv:2111.06619

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\} \text{ 相互作用長さ: } R_{\text{typ}} \longrightarrow R_{\text{int}}$$

$$R_{\text{typ}} \text{ の再定義: } R_{\text{typ}} = \max \left\{ R_{\text{int}}, R_{\text{eff}} \right\},$$

$$R_{\text{eff}} = \max \left\{ |r_e|, \frac{|P_s|}{R^2}, \dots \right\}.$$

$R_{\text{typ}} = R_{\text{int}}$  のとき、従来の弱束縛関係式に帰着

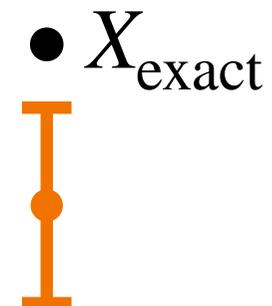
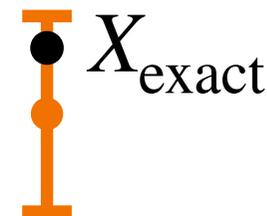
## 数値計算による改良の妥当性の評価

有効レンジモデル ( $R_{\text{int}} \neq 0$ )

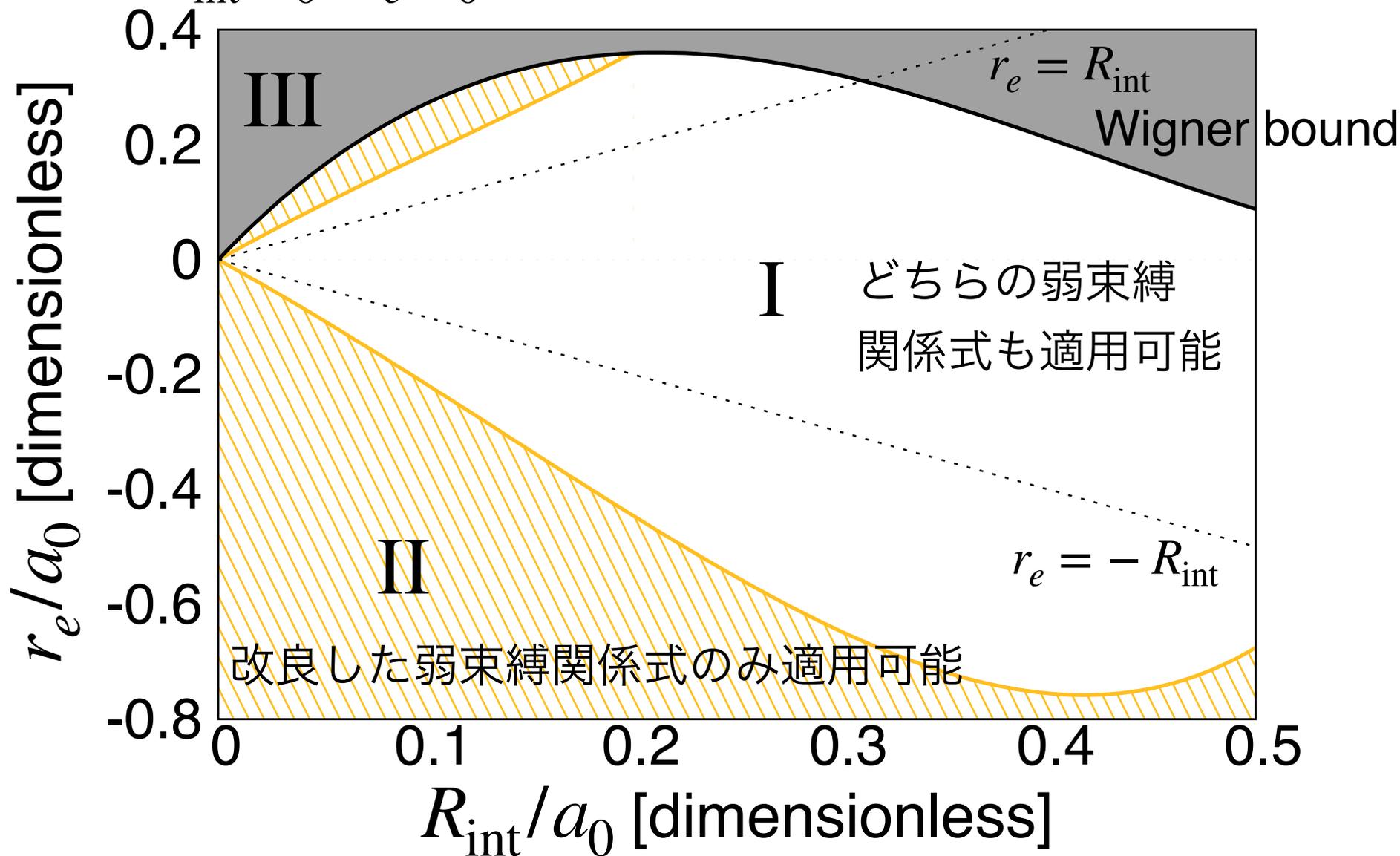
弱束縛関係式が有用なのは...

$$X_l < X_{\text{exact}} < X_u$$

 正確さの条件



$R_{\text{int}}/a_0 - r_e/a_0$  平面での弱束縛関係式の適用可能範囲



レンジ補正による改良は弱束縛関係式の適用可能範囲を広げる

束縛状態	粒子 1	粒子 2	$a_0$	$r_e$	$R_{\text{int}}$	
$d$	$p$	$n$	5.42 fm	1.75 fm	1.43 fm	[1]
$X(3872)$	$D^0$	$\bar{D}^{*0}$	28.5 fm	-5.34 fm	1.43 fm	[2]
$N\Omega$ dibaryon	$N$	$\Omega$	5.30 fm	1.26 fm	0.676 fm	[3]
$\Omega\Omega$ dibaryon	$\Omega$	$\Omega$	4.6 fm	1.27 fm	0.949 fm	[4]
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	$d$	$\Lambda$	16.8 fm	2.3 fm	4.31 fm	[5]
${}^4\text{He}$ dimer	${}^4\text{He}$	${}^4\text{He}$	189 B.R.	13.8 B.R.	10.2 B.R.	[6]

$a_0 > R_{\text{int}}$  なので低エネルギー普遍性が成り立つ

${}^3_{\Lambda}\text{H}$  以外の束縛状態 :  $|r_e| > R_{\text{int}}$   レンジ補正が重要

[1] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001), nucl-th/0006014.

[2] A. Esposito, L. Maiani, A. Pilloni, A. D. Polosa and V. Riquer (2021), 2108.11413.

[3] HAL QCD, T. Iritani *et al.*, Phys. Lett. B **792**, 284 (2019), 1810.03416.

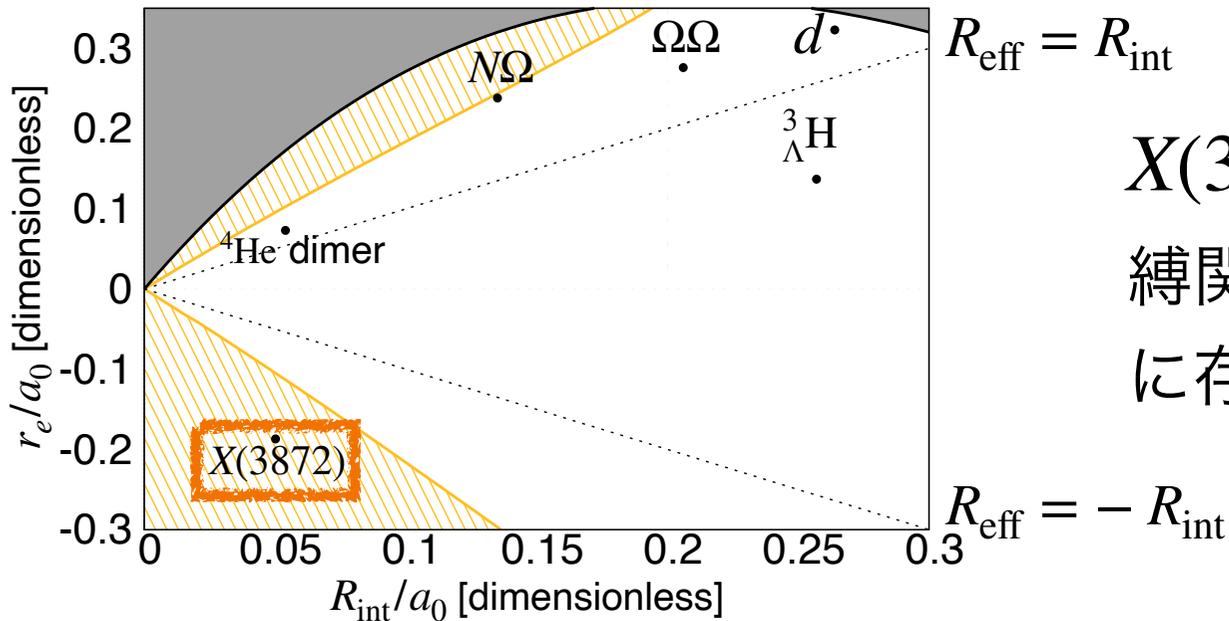
[4] S. Gongyo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **120**, 212001 (2018), 1709.00654.

[5] H. W. Hammer, Nucl. Phys. A **705**, 173 (2002), nucl-th/0110031.

[6] A. Kievsky and M. Gattobigio, Phys. Rev. A **87**, 052719 (2013), 1212.3457.

$$R_{\text{typ}} = R_{\text{eff}}$$

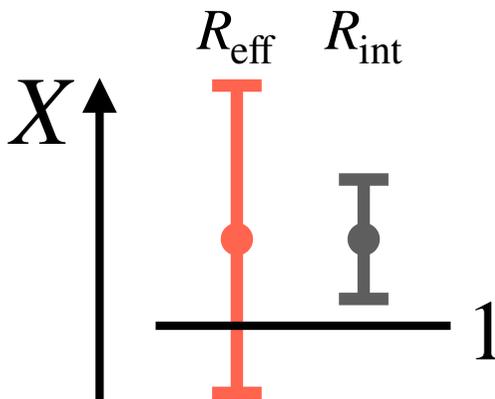
# 物理系への応用



$X(3872)$  は改良した弱束縛関係式のみが有用な範囲に存在

$X$  の下限  $X_l$

束縛状態	$R_{\text{eff}}$	$R_{\text{int}}$
$d$	0.738	0.857
$X(3872)$	0.530	0.681
$N\Omega$	0.787	1.04
$\Omega\Omega$	0.775	0.934
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	0.745	0.745
${}^4\text{He dimer}$	0.929	0.967



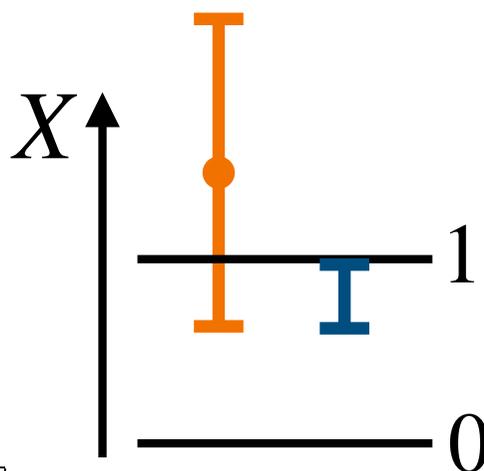
従来の弱束縛関係式から見積もられた  
 $N\Omega$  dibaryon の  $X_l > 1$   
 定義上の  $X$  の範囲

$0 \leq X \leq 1$  と矛盾

$X(3872)$  と  $N\Omega$  の  $X$  を見積もるには、レンジ補正が必要

# 物理系への応用

$0 \leq X \leq 1$  を用いて  
決定した  $X$  の範囲



束縛状態	複合性 $X$
$d$	$0.738 \leq X \leq 1$
$X(3872)$	$0.530 \leq X \leq 1$
$N\Omega$	$0.801 \leq X \leq 1$
$\Omega\Omega$	$0.791 \leq X \leq 1$
${}^3_{\Lambda}\text{H}$	$0.745 \leq X \leq 1$
${}^4\text{He dimer}$	$0.92 \leq X \leq 1$

- 複合成分が支配的:  $0.5 < X$

-  $X(3872)$  のモデル計算との比較

M. Takizawa and S. Takeuchi, PTEP 2013, 093D01 (2013), arXiv:1206.4877.

$$|X(3872)\rangle = c_1 |c\bar{c}\rangle + c_2 |D^0 \bar{D}^{*0}\rangle + c_3 |D^+ D^{*-}\rangle$$

$$|c_2|^2 = X, \quad 0.759 \leq X \leq 0.897$$

→ 弱束縛関係式の結果は整合性がある

# 結論と今後の見通し

- 弱束縛関係式: 観測量  複合性(X)

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

-  $r_e$ による弱束縛関係式のレンジ補正

-  $R_{\text{typ}}$ の再定義による弱束縛関係式の改良:

$$R_{\text{typ}} = \max \left\{ R_{\text{int}}, R_{\text{eff}} \right\}, \quad R_{\text{eff}} = \max \{ |r_e|, \dots \}$$

- 数値計算から、レンジ補正が適用可能範囲を広げるとわかった

- 改良した弱束縛関係式を実際の物理系へ応用、 $X$ を見積もった

 レンジ補正が重要な状態が存在することがわかった

- 今後は不安定状態の弱束縛関係式のレンジ補正を議論したい

# レンジ補正を考慮した 弱束縛関係式の応用



**Tomona Kinugawa**



**Tetsuo Hyodo**

Department of Physics, Tokyo Metropolitan University  
March 17th JPS 2022 spring

# 動機

$$\text{弱束縛関係式} \quad a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

## 低エネルギー一般性

固有エネルギーが小さい束縛状態なら系の詳細によらず成り立つ物理量が  $a_0$  のべきでスケールされる  $\rightarrow R = a_0$

$a_0 = R$  からのずれ？

-他のチャンネルの寄与によるズレ  $\leftarrow X \neq 1$

-相互作用長さによるズレ  $\leftarrow R_{\text{typ}} \neq 0$

-その他の長さスケール  $\leftarrow f(k) = \left[ -\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 - \frac{P_s}{4}k^4 + \dots - ik \right]^{-1}$  ?

$\rightarrow$  有効レンジ  $r_e$  の導入による弱束縛関係式のレンジ補正 ?

# 有効レンジモデル

E. Braaten, M. Kusunoki, and D. Zhang, *Annals Phys.*  
323, 1770 (2008), 0709.0499.

ゼロレンジの有効レンジモデルの特徴:

-1チャンネル:  $|\Psi\rangle = |\text{hadronic molecule}\rangle \Leftrightarrow X = 1$

-相互作用が点状 (ゼロレンジ) :  $R_{\text{typ}} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\} \rightarrow R \quad ?$$

くりこまれた散乱振幅 ( $R_{\text{int}} \rightarrow 0$ ):

$$a_0 = R \frac{2r_e/R}{1 - (r_e/R - 1)^2} = R \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{r_e}{R}\right|\right) \right] \Rightarrow a_0 \neq R \quad !$$

→  $r_e$ による弱束縛関係式のレンジ補正

# 数値計算

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}$$

改良した弱束縛関係式が有用な範囲は？

$$\text{中心値: } X_c = \frac{a_0/R}{2 - a_0/R}$$

誤差項の定量的な評価:  $\xi \equiv R_{\text{typ}}/R$

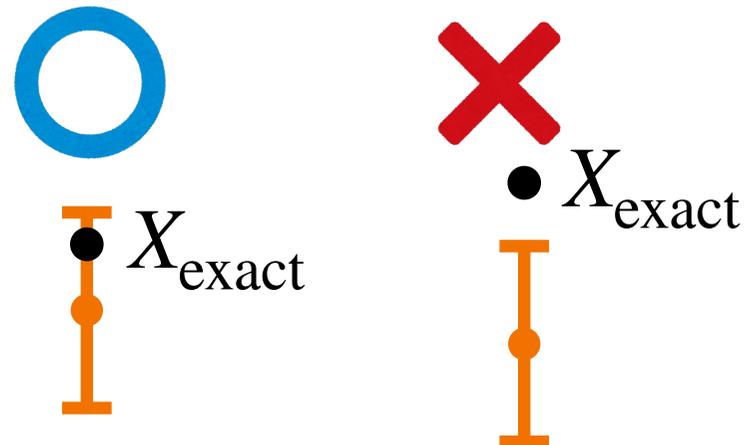
Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP  
2017, 023D02 (2017).

$$\rightarrow X_u = \frac{a_0/R + \xi}{2 - a_0/R - \xi}, \quad X_l = \frac{a_0/R - \xi}{2 - a_0/R + \xi}.$$

弱束縛関係式が有用なのは...

$$X_l < X_{\text{exact}} < X_u$$

$\rightarrow$  正確さの条件



# 数値計算

有効レンジモデル ( $R_{\text{int}} \neq 0$ )

$$f(k; \lambda_0, \rho_0, \Lambda) = \left[ -\frac{1}{a_0} + \frac{r_e}{2}k^2 + \mathcal{O}(R_{\text{int}}) - ik \right]^{-1} (r_e \text{ と } R_{\text{int}} \text{ の2つの長さスケール})$$

-  $r_e \neq 0$ :  $\xi_{\text{eff}} = |r_e/R| \rightarrow r_e$ による誤差

-  $R_{\text{int}} \neq 0$ :  $\xi_{\text{int}} = R_{\text{int}}/R \rightarrow R_{\text{int}}$ による誤差

モデルの性質による  $X$  の値 (真の値  $X_{\text{exact}}$ )

$$X_{\text{exact}} = 1$$

$\rightarrow$  正確さの条件が成り立つ  $r_e$  と  $R_{\text{int}}$  の領域を探す  
弱束縛関係式の適用可能範囲は？

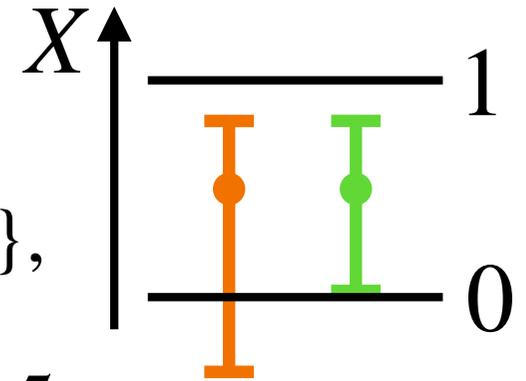
# 数値計算 精度

弱束縛関係式から見積もられる $X$ の精度

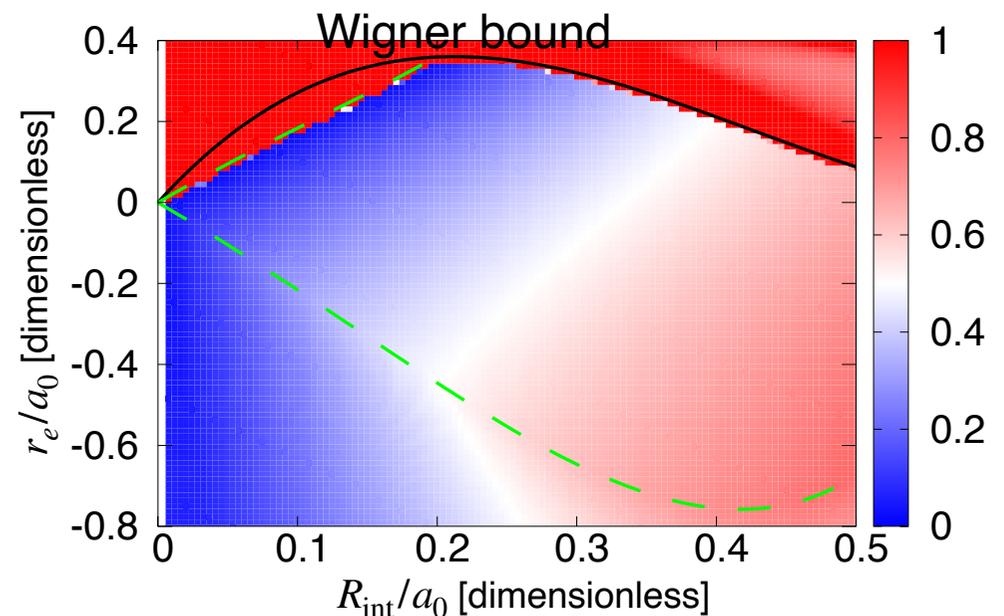
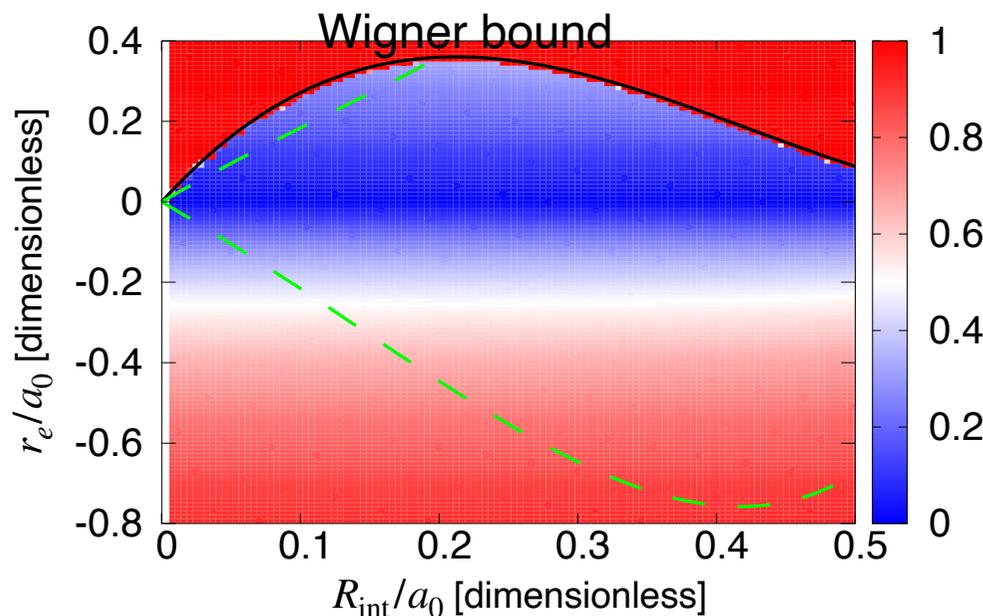
実質的な誤差の幅  $\bar{E}$

$$\bar{E} = \bar{X}_u - \bar{X}_l, \quad \bar{X}_u = \min\{X_u, 1\}, \quad \bar{X}_l = \max\{X_l, 0\},$$

意味のある見積もりのためには、多くとも  $\bar{E} \leq 0.5$



$R_{\text{int}}/a_0 - r_e/a_0$  平面での弱束縛関係式の誤差の幅  $\bar{E}$



# 数値計算 適用可能範囲

$X_{\text{exact}} \leq 1$ となるモデル (共鳴モデル)

$$X_{\text{exact}}^{-1} = 1 + 16\pi\kappa \frac{g_0^2}{\left\{ (-\kappa^2 - \nu_0) \left( \frac{8\pi}{1 - \frac{2}{\pi}\Lambda} + \frac{g_0^2}{\nu_0} \right) - g_0^2 \right\}^2},$$

弱束縛関係式の適用可能範囲 ( $ma_0^2\nu_0 = -0.5$ )

$$f(k)^{-1} = -\frac{8\pi}{m} \left( \lambda_0 + \frac{g_0^2}{E - \nu_0} \right)^{-1} \frac{2}{\pi} \Lambda - ik,$$

$$r_e = -\frac{16\pi g_0^2}{m^2 \nu_0^2} \left( -\frac{g_0^2}{\nu_0} + \lambda_0 \right)^{-2} < 0 \quad (\text{Wigner bound})$$

