Källen functionが出てくるところの計算

衣川友那

June 6, 2023

1　どのような場合を考えているか

次のような散乱を重心系で考えます。

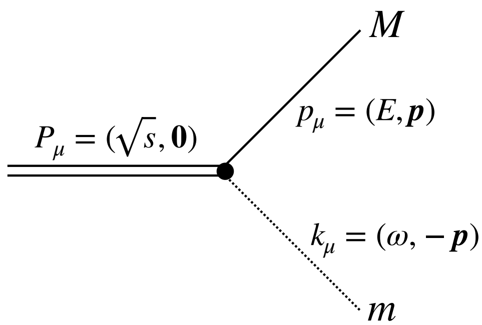

Figure 1: 今考えたい散乱の模式図。

ここでそれぞれの粒子のエネルギーは

$$P_\mu = (\sqrt{s}, \boldsymbol{0}), \tag{1}$$
$$p_\mu = (E, \boldsymbol{p}), \tag{2}$$
$$k_\mu = (\omega, -\boldsymbol{p}), \tag{3}$$

です。重心系を考えているため、入射粒子の運動量を $\boldsymbol{0}$ とすると出ていく粒子の運動量は大きさが同じで符号が反対になります（運動量保存）。

このとき、エネルギー保存の式

$$P_\mu = p_\mu + k_\mu, \tag{4}$$
$$\sqrt{s} = E + \omega, \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

と相対論的 on-shell 条件の式

$$m^2 = \omega^2 - p^2, \tag{7}$$
$$M^2 = E^2 - p^2, \tag{8}$$

が成り立ちます。ただし m と M はそれぞれ出ていく粒子の質量です。これらの条件を用いると、出ていく粒子の 3 元運動量の大きさ $p = |\boldsymbol{p}|$ が Källen 関数

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \tag{9}$$

を用いて

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, M^2, m^2)}{2\sqrt{s}} \tag{10}$$

のように書けることが知られています。この note はその計算のメモです。

2　計算 その 1

エネルギー保存の式を両辺 2 乗します:

$$\begin{aligned} P_\mu^2 &= (p_\mu + k_\mu)^2 \\ s &= E^2 - p^2 + \omega^2 - p^2 + 2E\omega + 2p^2 \\ &= M^2 + m^2 + E\omega + 2p^2 \end{aligned} \tag{11}$$

消去したい文字を含む $E\omega$ の項イコールの形にしてもう一度両辺 2 乗します:

$$\begin{aligned} 2E\omega &= s - M^2 - m^2 - 2p^2 \\ 4E^2\omega^2 &= (s - M^2 - m^2 - 2p^2)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

次にまず左辺を計算します。(7) と (8) より

$$\begin{aligned} m^2M^2 &= \omega^2E^2 + p^4 - p^2(\omega^2 + E^2) \\ &= \omega^2E^2 + p^4 - p^2 s \\ \rightarrow \quad \omega^2E^2 &= m^2M^2 - p^4 + p^2 s. \end{aligned} \tag{13}$$

ただし、1 行めから 2 行めで (5) を使いました。

右辺も計算します:

$$\begin{aligned} &s^2 + M^4 + m^4 + 4p^4 - 2sm^2 - 2sM^2 - 4sp^2 + 2m^2M^2 + 4m^2p^2 + 4M^2p^2 \\ &= (s^2 + M^4 + m^4 - 2sm^2 - 2sM^2 - 2m^2M^2) + 4p^4 - 4sp^2 + 4m^2M^2 + 4m^2p^2 + 4M^2p^2 \\ &= \lambda(s, M^2, m^2) + 4p^4 - 4sp^2 + 4m^2M^2 + 4m^2p^2 + 4M^2p^2 \end{aligned} \tag{14}$$

式前半はほぼ Källen 関数の形なので、足りない項を付け足して Källen 関数が出るように整理しました。

(13) と (14) を (12) に代入します:

$$
\begin{aligned}
4(m^2M^2 - p^4 + ps) &= \lambda(s, M^2, m^2) + 4p^4 - 4sp^2 + 4m^2M^2 + 4m^2p^2 + 4M^2 \\
\cancel{4m^2M^2} - 4p^4 + 4p^2s &= \lambda(s, M^2, m^2) + 4p^4 - 4sp^2 + \cancel{4m^2M^2} + 4p^2(m^2 + M^2) \\
4p^2s &= \lambda(s, M^2, m^2) + 8p^4 - 4sp^2 + 4p^2(\omega^2 + E^2 - 2p^2) \\
4p^2s &= \lambda(s, M^2, m^2) + 8p^4 - 4sp^2 + 4p^2(s - 2p^2) \\
4p^2s &= \lambda(s, M^2, m^2) \cancel{+8p^4} \cancel{-4sp^2} \cancel{+4p^2s} \cancel{-8p^2} \\
p^2 &= \frac{\lambda(s, M^2, m^2)}{4s} \\
\therefore \quad |\boldsymbol{p}| &= \frac{\lambda^{1/2}(s, M^2, m^2)}{2\sqrt{s}}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ただし、2 行めから 3 行めは (7) と (8) を使いました。こうして、確かに $|\boldsymbol{p}|$ は Källen 関数を含む形で書けることがわかりました。

3　計算 その 2

エネルギー保存の式より、

$$
P_\mu - p_\mu = k_\mu. \qquad (16)
$$

これを両辺 2 乗して on-shell 条件の式 $p_\mu^2 = M^2, k_\mu^2 = m^2$ を使うと

$$
\begin{aligned}
P_\mu^2 + p_\mu^2 - 2P_\mu \cdot p_\mu &= k_\mu^2 \\
s + M^2 - 2E\sqrt{s} &= m^2, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
E = \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s}}, \qquad (18)
$$

を得ます。同様に、エネルギー保存の式より

$$
P_\mu - k_\mu = p_\mu. \qquad (19)
$$

これを両辺 2 乗して on-shell 条件の式を使うと

$$
\begin{aligned}
P_\mu^2 + k_\mu^2 - 2P_\mu \cdot k_\mu &= p_\mu^2 \\
s + m^2 - 2\omega\sqrt{s} &= M^2, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$\omega = \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} \tag{21}$$

を得ます。

ここで、on-shell 条件の式 2 つを足すと、

$$\begin{aligned} E^2 + \omega^2 - 2p^2 &= M^2 + m^2 \\ p^2 &= \frac{E^2 + \omega^2 - M^2 - m^2}{2} \end{aligned} \tag{22}$$

となるので、これに (18) 式と (21) 式を代入すると

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{E^2 + \omega^2 - M^2 - m^2}{2} \\ &= \frac{s^2 + M^4 + m^4 + 2sM^2 - 2sm^2 - 2M^2m^2 + s^2 + M^4 + m^2 - 2sM^2 + 2sm^2 - 2M^2m^2}{8s} - \frac{M^2 + m^2}{2} \\ &= \frac{2(s^2 + M^4 + m^4 - 2M^2m^2)\cancel{+2sM^2 - 2sm^2}\cancel{-2sM^2 + 2sm^2} - 4sM^2 - 4sm^2}{8s} \\ &= \frac{2(s^2 + M^4 + m^4 - 2M^2m^2 - 2sM^2 - 2sm^2)\cancel{+4sM^2 + 4sm^2}\cancel{-4sM^2 - 4sm^2}}{8s} \\ &= \frac{\lambda(s, M^2, m^2)}{4s}, \\ \therefore |\boldsymbol{p}| &= \frac{\lambda^{1/2}(s, M^2, m^2)}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \tag{23}$$

Källen 関数が得られました。