みようみまねECIS97使用法

S. Shimoura
CNS, University of Tokyo

平成19年12月10日

概 要

Coupled Channel/DWBA 計算コード ECIS97 の実用的な使用法について解説する。

1 Introduction

DWBA は「どうしよう、わからない、僕、あきらめた」の略とか言われていますが、直接反応過程を計算する計算手法として、かなり確立されたものである。直接反応モデルは、反応の前後の（２体の）相対運動の波動関数（角運動量固有状態としての）をポテンシャル散乱問題を解くことによって量子力学的に求め、遷移過程を形状因子 (Form Factor) の形でポテンシャルとして表現、それらの Overlap を移行角運動量毎に計算することにより、微分断面積などの物理量を求めるモデルあると考えればよい。これを摂動的に取り扱うのが DWBA で、多次元の固有値問題として、Coupling を取り扱うのが Couple Channel 法である。(詳しくは、教科書を参照のこと) 従って、計算に必要な情報 (パラメータ) は、

- 入口および出口チャンネルの波動関数を規定する歪曲ポテンシャル
- Form Factor

である。Form Factor には、状態間の遷移確率が含まれており、この中に換算遷移確率などの核構造の情報が含まれている。

さて、こうした計算ができるプログラムの１つ ECIS97 パッケージに含まれる ECIS94 の Notes および Description をよく読むと、入力方法や出力結果の Option をちゃんと設定すると、“できたらいいな” と思っていた微分断面積以外のオブザーバブルをが実は、計算 “できる” ということがわかる。このドキュメントでは、いくつかの Option のうち動作確認ができた入力データについて解説し、計算例を示す。

第２節では、Global Optical Potential、第３節では、全体的な計算パラメータ、第４節では、典型的な Collective Excitation 、第５節では、Form Factor の外からの入力、第６節では、崩壊の角分布や角度相関に用いられる Statistical Tensor および Density Matrix、第８節では、Coulomb 励起の計算例、第??説では、Folding 模型について述べる。

なお、このドキュメントや sample file など (の一部) は、

`http://www.cns.s.u-tokyo.ac.jp/~shimoura/pub/ecis/`

にある。

2 Global Optical Potential

陽子、中性子に対する Global Optical Potential として CH89[1] がよく使われる。

80 MeV 以上の α 粒子に対する Global Optical Potential は、例えば、文献 [2] にある。

$$
\begin{aligned}
U &= -Vf(r) - iWg(r) + V_{Coul} \\
f(r) &= \frac{1}{1+\exp((r - r_v A^{1/3})/a_v)} \\
g(r) &= \frac{1}{1+\exp((r - r_w A^{1/3})/a_w)} \\
V(A,Z,E) &= 101.1 + 6.051\frac{Z}{A^{1/3}} - 0.248E \quad (\mathrm{MeV}) \\
W(A,Z,E) &= 26.82 - 1.076\, A^{1/3} + 0.006E \quad (\mathrm{MeV}) \\
r_v &= 1.245 \quad (\mathrm{fm}) \\
r_w &= 1.570 \quad (\mathrm{fm}) \\
a_v &= 0.817 - 0.0085A^{1/3} \quad (\mathrm{fm}) \\
a_w &= 0.692 - 0.020A^{1/3}
\end{aligned}
$$

この他の Global Optical Potential も存在する。

重イオン同士の場合では、以下のポテンシャルがよく用いられる (ようだ)。

System	^{12}C+^{208}Pb	^{17}O+^{208}Pb	^{12}C+^{12}C
Energy (MeV)	$30A$	$84A$	$84A$
V (MeV)	200	50	120
r_v (fm)	0.91	1.067	0.71
a_v (fm)	0.9	0.8	0.84
W (MeV)	76.2	57.9	34.02
r_W (fm)	1.11	1.067	0.96
a_W (fm)	0.38	0.8	0.69
r_C (fm)	?	1.25 (?)	? 誰か教えて!

3 Integration step, Matching Radius, Maximum Angular Momentum

Integration step (`H`) は、default では、min(1/(2k),a/2) になっている。例えば、核子あたり 87.5 MeV の ^{14}O+^{208}Pb の系では、k=27.3 fm^{-1} であり、H は、 0.0182 fm と非常に小さい値であることに注意。

一方、Matching Radius (R_m) は default では、20fm より小さいようなので、Coulomb 励起の計算で超前方まで計算したいときなどでは、これを大きくとる必要がある。核子あたり 87.5 MeV の ^{14}O+^{208}Pb で、1^- (5.17 MeV) への励起を計算する場合は、800 fm にすれば、0.5 degree くらいまでちゃんと計算している (ようだ)。Matching Radius を大きくするとき、以下の 2 つのことに注意。

1. 最大角運動量は、$k \times R_m$ 程度にしないといけない。上の例だと、$27.3 \times 800 \simeq 21800$ という非常に大きな値になる。こうした場合は、Interpolation の option (`LO(43)`) を利用すれば計算時間を節約できる。

2. Potential や Coupling Form Factor は、step `H` で R_m まで計算する。上の例だと、$800/0.0182 \simeq 44000$ 点が計算される。現象論的には、これが 65536 ($=2^{16}$) を超えるとおかしくなる。

われわれのエネルギー領域での重い核同士の Coulomb excitation の計算はかなり heavy になり、収束性などについて検討をしておく必要がある。(第 8 節 Coulomb excitation を参照のこと)

4 Vibrational Model と Rotational Model

4.1 Vibrational Model

Harmonic Vibrational Model の最も簡単な入力例および対応する description の行を表 1 および表 2 に示す。

```
12Be  + 240 MeV ALPHAS, Vibration excitation, def L global ver01
FFFFFTFFFFFTFFFFFFFFFFFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
TTTTTFFTFFFFFFFFFFFFFTFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
    2  120
 .1       12.
 0.      + 240.              4.          12.       8.
    0
 2.      + 2.102
    1    1
    2    0 2.0
52.14     1.245     .7975
27.51     1.570     .6462
  0.0
  0.0
  0.0
  0.0
1.3
  0.0
0.2       0.2       30.
FIN
```

表 1: [SAMPLE1] Simple vibrational model

`H` と R_m は default 値ではなく、それぞれ、0.1 fm と 12 fm としてあるが、この例の場合だと、default を使ってもほとんど差はない。また、`LO(6)=.TRUE.` にしてあるので、変形の大きさは、変形長 (deformation length = 2.0 fm) で入力している。また、同じ変形長での Imaginary Potential による励起は含んでいるが、Coulomb 励起は含まれていない。(`LO(11)=.FALSE.; LO(12)=.TRUE.`)

行	対応する Description の行
1	ECIS-009 – ECIS-019 (Title)
2	ECIS-021 – ECIS-175 (Logicals 1–50)
3	ECIS-177 – ECIS-252 (Logicals 51–100)
4	ECIS-254 – ECIS-311 (# of levels; Maximum Ang. Mom.)
5	ECIS-313 – ECIS-333 (Step size; Matching Radius)
6	ECIS-423 – ECIS-451 (J-pi; Ein; Ab; At; Zb*Zt; for G.S.)
7	ECIS-456 – ECIS-474 (indicating G.S.)
8	ECIS-423 – ECIS-451 (J-pi; Ex; for Exc.)
9	ECIS-456 – ECIS-474 (# of phonon(s) for Exc.)
10	ECIS-512 – ECIS-521 (Characteristic of phonon)
11	ECIS-652 – ECIS-656 (Real Volume Potential)
12	ECIS-658 – ECIS-662 (Imaginary Volume Potential)
13	ECIS-664 – ECIS-668 (Real Surface Potential)
14	ECIS-670 – ECIS-674 (Imaginary Surface Potential)
15	ECIS-676 – ECIS-680 (Spin-Orbit Potential)
16	ECIS-682 – ECIS-689 (Imaginary Spin-Orbit Potential)
17	ECIS-691 – ECIS-695 (Coulomb Potential)
18	ECIS-697 – ECIS-713 (Spin-Orbit Coulomb Potential)
19	ECIS-811 – ECIS-818 (Angles)
20	ECIS1705 (Termination)

表 2: SAMPLE1 の各行に対応する description の行

奇核や奇奇核のように基底状態の spin が 0 でない場合 ($J_0 \to J$ (ℓ-th multipole)) の (微分) 断面積の計算は、$0 \to l$ (ℓ-th multipole) を計算した後

$$\frac{2J+1}{(2J_0+1)(2\ell+1)}$$

を掛ければよい。しかし、崩壊 γ 線の角度分布など微分断面積以外の observable も計算したいときは、第 5 節 Form Factor を外から入力する方法を用いる必要がある。

4.2 Rotational Model

Symmetric Rotator Model の最も簡単な入力例および対応する description の行を表 3 および表 4 に示す。

この例では、`LO(6)=.TRUE.` にしてあるので、変形の大きさは、変形長 (deformation length = 2.0 fm) で入力している。また、Imaginary Potential による励起および Coulomb 励起が含まれている。(`LO(11)=.TRUE.; LO(12)=.TRUE.`)

```
12Be  + 240 MeV ALPHAS, SYMMETRIC ROTATOR (def. L), global ver01
TFFFFTFFFFTTFFFFFFFFFFFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
TTTTTFFTFFFFFFFFFFFFFTFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
    2  120
 .1        12.00
 0.      + 240.              4.         12.       8.
 2.      + 2.102
    2    4
 2.0
52.14     1.245     .7975
27.51     1.570     .6462
 0.0
 0.0
 0.0
 0.0
1.3
 0.0
0.2       0.2       30.
FIN
```

表 3: [SAMPLE2] Rotational Model の入力例

行	対応する Description の行
1	ECIS-009 – ECIS-019 (Title)
2	ECIS-021 – ECIS-175 (Logicals 1–50)
3	ECIS-177 – ECIS-252 (Logicals 51–100)
4	ECIS-254 – ECIS-311 (# of levels; Maximum Ang. Mom.)
5	ECIS-313 – ECIS-333 (Step size; Matching Radius)
6	ECIS-423 – ECIS-451 (J-pi; Ein; Ab; At; Zb*Zt; for G.S.)
7	ECIS-423 – ECIS-451 (J-pi; Ex; for Exc.)
8	ECIS-536 – ECIS-547 (Information of Rotational Model)
9	ECIS-549 – ECIS-562 (Deformation)
10	ECIS-652 – ECIS-656 (Real Volume Potential)
11	ECIS-658 – ECIS-662 (Imaginary Volume Potential)
12	ECIS-664 – ECIS-668 (Real Surface Potential)
13	ECIS-670 – ECIS-674 (Imaginary Surface Potential)
14	ECIS-676 – ECIS-680 (Spin-Orbit Potential)
15	ECIS-682 – ECIS-689 (Imaginary Spin-Orbit Potential)
16	ECIS-691 – ECIS-695 (Coulomb Potential)
17	ECIS-697 – ECIS-713 (Spin-Orbit Coulomb Potential)
18	ECIS-811 – ECIS-818 (Angles)
19	ECIS1705 (Termination)

表 4: SAMPLE2 の各行に対応する description の行

スピン J_0 が 0 でない核の Symmetric Rotor は、J_0 の値を K 量子数と考えることがで

き、$B(\mathrm{E2})$ は、

$$B\left(\mathrm{E2}; J_0 \to J\right) = \frac{5}{16\pi} e^2 Q_0^2 \left\langle J_0\ J_0\ 2\ 0 | J\ J_0 \right\rangle^2$$

となり、Stretch E2 遷移 ($J = J_0 + 2$) の場合は特に、

$$\left\langle J_0\ J_0\ 2\ 0 | J_0 + 2\ J_0 \right\rangle^2 = \frac{12}{(2J_0+3)(2J_0+4)}$$

になる。これは、同じ変形度 Q_0 でも $B(\mathrm{E2})$ の値がスピンの値に応じて異なることを示している。同様に、非弾性散乱の断面積も

$$\sigma\left(J_0 \to J = J_0 + 2\right) = \frac{12}{(2J_0+3)(2J_0+4)} \sigma\left(0 \to 2\right)$$

と scaling される (すなわち、同じ $B(\mathrm{E2})$ なら断面積は同じである)。この scaling factor は、前節の vibrational model の時とは異なっていることに注意。[1]

4.3 注意

- Rotational model のときは、Optical Potential 自身も変形させた計算になっているので、β あるいは βR を変えると、角度分布の形も弾性散乱の微分断面積の結果も厳密には一致しない (変形を大きくすると実効的には半径も diffuseness も大きくなる)(comp1.gif)
- Rotational model のときは、変形した Potential を再度多重極展開しているので、純粋な四重極変形のときでも、$L = 4$ の遷移が起こりうる。
- Rotational model による 0^+ から 2^+ への非弾性散乱の計算では、最も単純な場合でも、$0^+ \leftrightarrow 2^+(L = 2)$ の coupling だけでなく、$2^+ \leftrightarrow 2^+(L = 2)$ および $2^+ \leftrightarrow 2^+(L = 4)$ の coupling (reorientation) も考慮されている。
- 一方、Vibrational model による 1 phonon 状態への励起では、$0^+ \leftrightarrow 2^+(L = 2)$ の coupling のみしかない。

5 Coupling Form Factor を外から入力したい

Description (ECIS-039) には `LO(7)=.TRUE.` にすると外から Form Factor を入力できるとなっている。また、ECIS97 の package の dat6, res6 には計算例もある。

基底状態が有限のスピンを持つ場合の vibrational model の計算や、後述する、Isoscalar E1 excitation や microscopic form factor を使いたいときにこのオプションが利用できる。いろいろな計算の比較をすることなどを考えると、多少面倒だが、こちらの方式で入力するのが却って便利。

まず、SAMPLE1 と同じ計算をこのオプションでやる場合の入力例を表 5 および表 6 に示す。Optical Potential および Coupling Potential の入力のしかたが違うことに注意が必要。

```
12Be  + 240 MeV ALPHAS, Vibration excitation, ext input global
FFFFFFTFFFFTFFFFFFFFFFFFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
TTTTTFFTFFFFFFFFFFFFFTFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
    2  120
 .1        12.
 0.      + 240.              4.          12.       8.
 2.      + 2.102
0.2        0.2       30.
    1    1    0
    1    2    1
    1    2    0    0 -1.0000
    2    2    0
    1    1    0    1    0    2    0   -1
52.14      2.850338  .7975
    1    1    0    2    0    2    0   -1
27.51      3.594403  .6462
    1    1    0    3    0    2    0   -1

    1    1    0    4    0    2    0   -1

    1    1    0    7    0    2    0   -1
8.         2.97626
    1    2    1    1    0    0    0   -2
36.581     2.850338  .7975
    1    2    1    2    0    0    0   -2
15.307     3.594403  .6462
    1    2    1    3    0    0    0   -2

    1    2    1    4    0    0    0   -2

FIN
```

```
FFFFFFTFFFTTFFFFFFFFFFFFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
 ...
 ...
    1    2    1    7    0    0    0   -2
5.376      2.97626
FIN
```

表 5: [SAMPLE1r] SAMPLE1 と同じ計算をする別の入力例。クーロン励起を含める場合 (`LO(11)=.TRUE.`) は別枠のような変更、追加をすればよい。

基底状態が有限のスピンの場合は、$\ell; J_0 \to J$ の Matrix element として、

$$(-)^{\ell-1}\sqrt{\frac{2J+1}{2\ell+1}} \qquad \Longleftarrow \qquad \text{これは model によって違う可能性がある}$$

の値を入力すればよい。

また、Coulomb 励起をさらに加える場合 (`LO(11)=.TRUE.`)、Coupling Potential の最後に図の別枠にある部分を追加する。なお、強さは、$\beta Z_P Z_T$ を入力すればよい。

---

[1]実際 ECIS97 の計算では、K 量子数を指定することができ、その結果は、上記のように scaling されている (確認済)。

行	対応する Description の行
1	ECIS-009 – ECIS-019 (Title)
2	ECIS-021 – ECIS-175 (Logicals 1–50)
3	ECIS-177 – ECIS-252 (Logicals 51–100)
4	ECIS-254 – ECIS-311 (# of levels; Maximum Ang. Mom.)
5	ECIS-313 – ECIS-333 (Step size; Matching Radius)
6	ECIS-423 – ECIS-451 (J-pi; Ein; Ab; At; Zb*Zt; for G.S.)
7	ECIS-423 – ECIS-451 (J-pi; Ex; for Exc.)
8	ECIS-811 – ECIS-818 (Angles)
9–12	ECIS1235 – ECIS1335 (Reduced Matrix Elements)
13	ECIS1342 – ECIS1476 (Real Central Optical Potential (WS))
14	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth, Radius, Diffuseness)
15	ECIS1342 – ECIS1476 (Imaginary Central Optical Potential (WS))
16	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth, Radius, Diffuseness)
17	ECIS1342 – ECIS1476 (Real Surface Optical Potential (WS))
18	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth = 0, Radius, Diffuseness)
19	ECIS1342 – ECIS1476 (Imaginary Surface Optical Potential (WS))
20	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth = 0, Radius, Diffuseness)
21	ECIS1342 – ECIS1476 (Coulomb Potential (WS))
22	ECIS1520 – ECIS1532 (Z1*Z2, Radius)
23	ECIS1342 – ECIS1476 (Real Central Coupling (WS derivative))
24	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth*beta, Radius, Diffuseness)
25	ECIS1342 – ECIS1476 (Imaginary Central Coupling (WS derivative))
26	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth*beta, Radius, Diffuseness)
27	ECIS1342 – ECIS1476 (Real Surface Optical Potential (WS derivative))
28	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth = 0, Radius, Diffuseness)
29	ECIS1342 – ECIS1476 (Imaginary Surface Optical Potential (WS derivative))
30	ECIS1520 – ECIS1532 (Depth = 0, Radius, Diffuseness)
31	ECIS1705 (Termination)

表 6: SAMPLE1r の記述

Optical Potential や Coupling Form Factor を数値的に入力することも可能である。SAMPLE1 の計算結果で出力された Matrix element $(= -1)$ と Coupling Potential の数値を用いて数値的に Coupling potential を入力した例を表 7 に、SAMPLE1.5 と異なる入力の説明を表 8 に示す。

SAMPLE1 や SAMPLE2 の Collective Form Factor の出力結果をみると、Spin 0 標的、Symmetric deformation の場合の Form Factor の表式

$$F_l(r) = \frac{\beta R}{\sqrt{2l+1}} \frac{d}{dr} U(r)\, Y_{l0}^* = \frac{\beta R}{\sqrt{4\pi}} \frac{d}{dr} U(r)\, P_l$$

の P_l を除いた部分、すなわち、potential の微分を $\sqrt{4\pi}$ で割ったものになっており、数値入力のときはこれを考慮する必要がある。

```
12Be  + 240 MeV ALPHAS, Vib FormFactor Input, global ver01
FFFFFFTFFFFTFFFFFFFFFFFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
TTTTTFFTFFFFFFFFFFFFFTFFTFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
    2  120
 .1        12.00
 0.      + 240.              4.         12.       8.
 2.      + 2.102
0.2       0.2       30.
    1    1    0
    1    2    1
    1    2    0    0 -1.00
    2    2
    1    1    0    1    0    2    0   -1
52.14     2.850338  .7975
    1    1    0    2    0    2    0   -1
27.51     3.594403  .6462
    1    1    0    3    0    2    0   -1

    1    1    0    4    0    2    0   -1

    1    1    0    7    0    2    0   -1
8.        2.97626
    1    2    1    1
    1.        1.
  0.10             1.10137     0.20             1.23829
  0.30             1.39077     0.40             1.56016
(省略)
 11.70         0.000559234    11.80          0.00049333
 11.90         0.000435193    12.00          0.000383907   LAST
    1    2    1    2
    1.        1.
  0.10              0.1067     0.20            0.124373
(省略)
 11.70         8.57001e-05    11.80          7.34132e-05
 11.90         6.28879e-05    12.00          5.38716e-05   LAST
    1    2    1    3    0    0    0   -1

    1    2    1    4    0    0    0   -1

FIN
```

表 7: [SAMPLE3] 数値的にポテンシャルを入力した例

行	対応する Description の行
23	ECIS1342 – ECIS1476 (Real Central Coupling (External Input))
24	ECIS1478 – ECIS1483 (Scaling Factor)
25–29	ECIS1485 – ECIS1504 (Numerical Values)
30	ECIS1342 – ECIS1476 (Imaginary Central Coupling (External Input))
31	ECIS1478 – ECIS1483 (Scaling Factor)
32–35	ECIS1485 – ECIS1504 (Numerical Values)

表 8: 数値的に入力する場合の description

5.1 Isoscalar dipole form factor

α 非弾性散乱による 1^- 状態への遷移は、Harakeh and Dieperink が議論している [3]。この論文にある Form Factor (eq. (6)) は、以下のように複雑な表式なので、Optical Potential から別途計算して ECIS には外から数値を与える必要がある。

$$\begin{aligned}
\Delta U &= -\frac{\beta_R}{R_R\sqrt{3}}\left[3r^2\frac{d}{dr}+10r-\frac{5}{3}\left\{\left\langle r^2\right\rangle_R\right\}\frac{d}{dr}+\epsilon\left(r\frac{d^2}{dr^2}+4\frac{d}{dr}\right)\right]V(r)\\
&\quad -i\frac{\beta_I}{R_I\sqrt{3}}\left[3r^2\frac{d}{dr}+10r-\frac{5}{3}\left\{\left\langle r^2\right\rangle_I\right\}\frac{d}{dr}+\epsilon\left(r\frac{d^2}{dr^2}+4\frac{d}{dr}\right)\right]W(r)\\
\beta_R R_R &= \beta_I R_I\\
\epsilon &= \left(\frac{4}{E_Q}+\frac{5}{E_M}\right)\frac{\hbar^2}{3m_N A}\\
E_Q &= 63A^{-1/3}\ \ ;\ \ E_M = 80A^{-1/3}
\end{aligned}$$

変形パラメータ $\beta=\beta_R$ には、Isoscaler E1 sum rule limit があり、100 % 尽くしている場合の β は以下のように表される [3]。

$$\beta_R^2=\frac{6\pi\hbar^2}{mAE_x}R^2/\left(11\left\langle r^4\right\rangle_R-\frac{25}{3}\left\langle r^2\right\rangle_R^2-10\epsilon\left\langle r^2\right\rangle_R\right)$$

実際に ECIS に入力するときは、上の計算結果を $\sqrt{4\pi}$ で割った数値を入力する必要があることに注意。現実的には、sum rule 100% の場合の β_R を計算し、それを用いて Form Factor を計算して ECIS への入力データに利用すればよい (`ise1ff.f`)。Scaling Factor (f_e) を調節して断面積の絶対値を実験データにあわせれば、sum rule に対する fraction を f_e^2 で見積もる事ができる。

上記の表式は、(α,α') 等の軽イオン反応で適用されるが、Pb による E1 励起に含まれる核力成分の見積もりで必要な重イオン反応の時の処方箋は今後検討が必要である。とりあえず、同じ関数形の Form Factor を用いて、$\beta R=\beta' R'$ ($R=r_0A_T^{1/3}$, $R=r_0(A_T^{1/3}+A_P^{1/3})$ とした場合の計算例を後述する (第 8 節)。

6 γ 線や崩壊粒子の角度分布、Particle-γ や Particle-Particle 相関を計算したい

崩壊に関連する反応後の粒子の magnetic substates と関連した statistical tensor $(A^J_{\lambda\mu})$ あるいは、density matrix $(\rho^J_{m,m'})$ を、“Non standard observable” として出力できる (`LO(94)`)。実際、ECIS97 の package の dat2, res2 には、残留核の状態に関する observable の計算例がある。

Description 中の関連部分は以下のとおり。

```
ECIS-245
ECIS-940 -- ECIS-994 (NOTE: ECIS-980 -- ECIS983)
ECIS1169 -- ECIS1232
```

6.1 Statistical Tensor

Statistical Tensor は、反応後の放出粒子や残留核の substate population を表現するもので、スピン観測量や後述の γ 崩壊等の計算で用いられる、F 係数と対をなす。(cf. pp.38–39 in "NOTES ON ECIS94")

残留核の Statistical Tensor ($A^J_{\lambda\mu}$) を出力するには、`LO(94)=.TRUE.` にして、角度の入力後、表 9 のような入力をすればいい (SAMPLE5)。

Statistical Tensor は、Helicity 表示[2]のとき、λ=odd では pure imaginary になるが、i を除いたものが出力される。また、$A^J_{\lambda,-\mu} = (-)^{\lambda+\mu} A^J_{\lambda\mu}$ である。したがって、λ=odd では、$A^J_{\lambda 0} = 0$ であることに注意。

スピン 0 の標的に対する PWBA では、反応の散乱振幅は、

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &\propto \int d^3r \mathcal{F}_{Jm}(\vec{r}) \exp(i\vec{q}\cdot\vec{r}) \\
&\propto \int_0^\infty r^2 dr F_J(r)\, j_J(qr)\, Y_{Jm}(\hat{q}) \\
\mathcal{F}_{Jm}(\vec{r}) &= F_J(r)\, Y_{Jm}(\hat{r}) \quad \text{: Transition Form Factor} \\
\vec{q} &= \vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{out}} \quad \text{: Momentum Transfer}
\end{aligned}
$$

と表現され、Momentum Transfer (移行運動量) の方向に align する。すなわち、$\vec{q}$ の方向を z 軸にとると、$m = 0$ のみになる:

$$p^J_m = \delta_{m0}$$

このとき、この座標系での Statistical Tensor は、後述の F^0 係数を用いて、

$$
\begin{aligned}
A^J_{\lambda\mu}(PW;\vec{q}) &= (-)^J (2J+1)^{1/2} \langle J\ 0\ J\ 0 | \lambda\ 0\rangle \delta_{\mu 0} \\
&= F^0_\lambda (J\ 0\ J)\, \delta_{\mu 0}
\end{aligned}
$$

となる。より一般に、スピン J_0 の偏極していない標的に L の軌道角運動量を移行して、J の励起状態になる場合は、

$$p^J_m = \langle J_0\ m\ L\ 0 | J\ m\rangle$$

となり、Statistical Tensor は、

$$A^J_{\lambda\mu}(PW;\vec{q}) = F^0_\lambda (L\ J_0\ J)\, \delta_{\mu 0}$$

となる。Beam axis と Momentum Transfer とのなす角度を θ_q とおくと、Beam axis を z 軸にとったときには、

$$
\begin{aligned}
A^J_{\lambda\mu}\left(\mathrm{PW};\vec{k}_{\mathrm{in}}\right) &= \left(\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right)^{1/2} Y^*_{\lambda\mu}(\theta_q, 0)\, A^J_{\lambda 0}(\mathrm{PW};\vec{q}) \\
A^J_{\lambda 0}\left(\mathrm{PW};\vec{k}_{\mathrm{in}}\right) &= P_\lambda(\cos\theta_q)\, A^J_{\lambda 0}(\mathrm{PW};\vec{q}) \\
&\simeq (-)^{\lambda/2} \frac{(\lambda-1)!!}{\lambda!!} F^0_\lambda (L\ J_0\ J) \qquad (\vec{q} \perp \vec{k}_{\mathrm{in}}\ \text{のとき})
\end{aligned}
$$

と表される。中間エネルギー非弾性散乱のときは、最後の近似でおおよその値を見積もることができる。

[2] より、広義に反応平面内に z 軸をとった場合をいうことにする

```
    2   14
    0    1
    3    3
    0   -1   -2   -3   -4   -5   -6   -7   -8   -9  -10  -11  -12  -13
    3    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
FF2 1    1      A00-beam
                                     0
  1.0
FF2 2    1      A20-beam
                                     2
  1.0
FF2 3    1      A40-beam
                                     4
  1.0
FF2 4    1      A11-beam
                                     1    1
  1.0
FF2 5    1      A21-beam
                                     2    1
  1.0
FF2 6    1      A22-beam
                                     2    2
  1.0
FF2 7    1      A31-beam
                                     3    1
  1.0
FF2 8    1      A32-beam
                                     3    2
  1.0
FF2 9    1      A33-beam
                                     3    3
  1.0
FF210    1      A41-beam
                                     4    1
  1.0
FF211    1      A42-beam
                                     4    2
  1.0
FF212    1      A43-beam
                                     4    3
  1.0
FF213    1      A44-beam
                                     4    4
  1.0
```

表 9: [Sample5] Statistical Tensor を計算する入力例

6.2 Density Matrix

Density Matrix ($\rho^J_{m,m'}$) を出力するには、`LO(94)=.TRUE.` にして、同様に表 10 のような入力をすればいい (SAMPLE6)。なお、Helicity 表示では、$\rho^J_{m,-m'} = \rho^J_{-m,m'} = (-)^{J+m}\rho^J_{m,m'}$ および $(\rho^J_{m,m'})^* = \rho^J_{m',m}$ であることに注意。したがって、$|m'| = |m|$ のときは、$\rho^J_{m,m'}$ は実数である。実数部と虚数部をそれぞれ出力できるが、もともと実数の $|m'| = |m|$ のときは、虚数部の指定をすると計算が止まってしまうことに注意。

Substate population amplitude p_m^J を用いると、Density Matrix $\rho_{m,m'}^J = (p_{m'}^J)^* p_m^J$ と表されるので、共通の位相を除いて p_m^J を求めることができる。

6.3 Angular Correlation

Statistical Tensor $A_{\lambda\mu}^J(\theta)$ は、γ 崩壊の場合の F 係数と同様に扱うことができ、崩壊の角度分布が計算できる。文献 [6, 7] を参考のこと。

6.3.1 Decay from the excited state via direct reaction

Statistical Tensor $A_{\lambda\mu}^J(\theta)$ を用いて、スピン J の状態から、2^L 重極放射でスピン J_0 に遷移するときの γ 線の角度相関は、以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
W_L(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma) &= \frac{1}{4\pi}\left(1+\sum_{\substack{\lambda>0\\ \text{even}}} F_\lambda(L,J_0,J)\,F_\lambda^{\mathrm{R}}(J,\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma)\right)\\
F_\lambda^{\mathrm{R}}(J,\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma) &= \left(\frac{4\pi}{2\lambda+1}\right)^{1/2}\left\{A_{\lambda 0}^J(\theta)\,Y_{\lambda 0}(\theta_\gamma,\phi_\gamma)+\sum_{\mu>0}A_{\lambda\mu}^J(\theta)\left(Y_{\lambda\mu}(\theta_\gamma,\phi_\gamma)+Y_{\lambda\mu}^*(\theta_\gamma,\phi_\gamma)\right)\right\}\\
&= A_{\lambda 0}^J(\theta)\,P_\lambda(\cos\theta_\gamma)+2\sum_{\mu>0}A_{\lambda\mu}^J(\theta)\,\mathcal{P}_\lambda^\mu(\cos\theta_\gamma)\cos\mu\phi_\gamma
\end{aligned}
$$

ここで、P_λ は Legendre 多項式、F_λ (F 係数) および $\mathcal{P}_\lambda^\mu$ は、それぞれ

$$
\begin{aligned}
F_\lambda(L,J_0,J) &= (-)^{J_0-J-1}(2J+1)^{1/2}(2L+1)\langle L\;1\;L\;-1|\lambda\;0\rangle\,W(J\;J\;L\;L;\lambda\;J_0)\\
\mathcal{P}_\lambda^\mu(\S) &= \sqrt{\frac{(\lambda-\mu)!}{(\lambda+\mu)!}}\,P_\lambda^\mu(x)\\
P_\lambda^\mu(x) &= (-)^\mu\left(1-x^2\right)^{\mu/2}\frac{d^\mu}{dx^\mu}P_\lambda(x)
\end{aligned}
$$

と表される。偶々核の基底状態への遷移の場合は、$J_0=0$ なので、F 係数は以下のように簡単になる。

$$
F_\lambda(J\;0\;J) = (-)^{J+1}(2J+1)^{1/2}\langle J\;1\;J\;-1|\lambda\;0\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&F_2(1\;0\;1)=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\\
&F_2(2\;0\;2)=-\sqrt{\tfrac{5}{14}}\quad F_4(2\;0\;2)=-\sqrt{\tfrac{8}{7}}\\
&F_2(3\;0\;3)=-\sqrt{\tfrac{3}{4}}\quad F_4(3\;0\;3)=\sqrt{\tfrac{1}{22}}\quad F_6(3\;0\;3)=\sqrt{\tfrac{75}{44}}
\end{aligned}
$$

また、spin-0 の粒子崩壊の場合には、上記の F 係数を、

$$
\begin{aligned}
F_\lambda^0(L\;J_0\;J) &= (-)^{J-J_0}(2J+1)^{1/2}(2L+1)\langle L\;0\;L\;0|\lambda\;0\rangle\,W(J\;J\;L\;L;\lambda\;J_0)\\
F_\lambda^0(J\;0\;J) &= (-)^J(2J+1)^{1/2}\langle J\;0\;J\;0\;|\lambda\;0\rangle
\end{aligned}
$$

に置き換えるだけで計算できる。

```
    2   10
    0    1
    3    3
    0   -1   -2   -3   -4   -5   -6   -7   -8   -9
    3    1    1    1    1    1    1    1    1    1
FT2 1    1     rho00-beam
                                -3   -3
  1.0

FT2 2    1     rho11-beam
                                -2   -2
  1.0

FT2 3    1     rho22-beam
                                -1   -1
  1.0

FT2 4    1     Re(rho10)-beam
                                -2   -3
  1.0
  0.0
FT2 5    1     Im(rho10)-beam
                                -2   -3
  0.0
  1.0
FT2 6    1     Re(rho20)-beam
                                -1   -3
  1.0

FT2 7    1     Im(rho20)-beam
                                -1   -3
  0.0
  1.0
FT2 8    1     Re(rho21)-beam
                                -1   -2
  1.0

FT2 9    1     Im(rho21)-beam
                                -1   -2
  0.0
  1.0
```

表 10: [SAMPLE6] Density Matrix を計算する入力例

上記の表式は、散乱粒子の角度毎の γ 線の角度相関を与えるものであるが、散乱粒子の角度分布を積分することにより、γ 線の角度分布 $(w_L(\theta_\gamma))$ を計算することができる:

$$\begin{aligned}
w_L\left(\theta_\gamma\right) &= \frac{1}{4\pi}\left\{1+\sum_{\substack{\lambda>0\\ \text{even}}} F_\lambda\left(L\ J_0\ J\right)\left\langle A^J_{\lambda 0}\right\rangle P_\lambda\left(\cos\theta_\gamma\right)\right\}\\
\left\langle A^J_{\lambda 0}\right\rangle &= \frac{1}{\sigma_0}\int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\theta\right) A^J_{\lambda 0}\left(\theta\right)\\
\sigma_0 &= \int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\theta\right)
\end{aligned}$$

spin-0 粒子の崩壊の場合は F 係数を F^0 係数に置き換えるだけで計算できる。

角運動量が 1 だけ異なる混合遷移 (例えば E2/M1 など) を扱う場合、2 つの遷移を L および $L'=L+1$、混合パラメータ $\mathcal{M}(L+1)/\mathcal{M}(L)=\delta$ とすると、

$$\begin{aligned}
W_{L,L+1}\left(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right) &= \left\{W_L\left(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right)+\delta^2 W_{L+1}\left(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right)+2\delta W_{\text{int}}\left(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right)\right\}/\left(1+\delta^2\right)\\
W_{\text{int}}\left(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right) &= \frac{(-)^{J_0-J-1}}{4\pi}\left[(2J+1)(2L+1)(2L+3)\right]^{1/2}\times\\
&\qquad \sum_{\lambda>0} G_\lambda\left(L,L+1,J_1,J\right)F^{\text{R}}_\lambda\left(J,\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right)\\
G_\lambda\left(L,L',J_1,J\right) &= \left\langle L\ 1\ L'\ -1|\lambda\ 0\right\rangle W\left(J\ J\ L\ L';\lambda\ J_0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{L,L+1}\left(\theta_\gamma\right) &= \left\{w_L\left(\theta_\gamma\right)+\delta^2 w_{L+1}\left(\theta_\gamma\right)+2\delta w_{\text{int}}\left(\theta_\gamma\right)\right\}/\left(1+\delta^2\right)\\
w_{\text{int}}\left(\theta_\gamma\right) &= \frac{(-)^{J_0-J-1}}{4\pi}\left[(2J+1)(2L+1)(2L+3)\right]^{1/2}\times\\
&\qquad \sum_{\lambda>0} G_\lambda\left(L,L+1,J_1,J\right)\left\langle A^J_{\lambda 0}\right\rangle P_\lambda\left(\cos\theta_\gamma\right)
\end{aligned}$$

6.3.2 Angular correlation with intermediate radiaten unobserved

反応で励起した状態 (J) から、J_1 の状態を経て、J_0 の状態へカスケード崩壊をする場合で ($J(L_1)J_1(L_0)J_0$)、J から J_1 への遷移 (2^{L_1} 重極) を測定しないとき、J_1 から J_0 への遷移 (2^{L_0} 重極) の角度相関は、

$$\begin{aligned}
W_{L_0(L_1)}\left(\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right) &= \frac{1}{4\pi}\Bigg[1+(-)^{L_1-J-J_1}\left[(2J+1)(2J_1+1)\right]^{1/2}\times\\
&\qquad \sum_{\substack{\lambda>0\\ \text{even}}} W\left(J\ J\ J_1\ J_1\ ;\lambda\ L_1\right)F_\lambda\left(L_0,J_0,J_1\right)F^{\text{R}}_\lambda\left(J,\theta;\theta_\gamma,\phi_\gamma\right)\Bigg]\\
w_{L_0(L_1)}\left(\theta_\gamma\right) &= \frac{1}{4\pi}\Bigg[1+(-)^{L_1-J-J_1}\left[(2J+1)(2J_1+1)\right]^{1/2}\times\\
&\qquad \sum_{\substack{\lambda>0\\ \text{even}}} W\left(J\ J\ J_1\ J_1\ ;\lambda\ L_1\right)F_\lambda\left(L_0,J_0,J_1\right)\left\langle A^J_{\lambda 0}\right\rangle P_\lambda\left(\cos\theta_\gamma\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

7 Collective Form Factor

7.1 Transition Density[4]

スピンに依存しない非弾性散乱に対する Transition density は、

$$\rho_{\ell m}^{\eta t}=\left\langle \ell m;\eta \middle| \rho_{0\mathrm{p}}^{t}(\vec{r}) \middle| 0\right\rangle=(2\ell+1)^{-1/2}\ g_{\ell}^{\eta t}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)^{*}$$

と表される、ここで、原子核の集団励起は、“isoscalar”($\eta=0$) あるいは “isovector” ($\eta=1$) と分類され、プローブは、“isoscaler” ($t=0$) あるいは “isovector” ($t=1$) と分類される。また $\rho_{0\mathrm{p}}^{t}$ は isoscalar/isovector density operator

$$\rho_{0\mathrm{p}}^{t}(\vec{r})=\sum_{n=1}^{N}\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)+(-)^t\sum_{p=1}^{Z}\delta(\vec{r}-\vec{r}_p)$$

である。動径部分 $g_{l}^{\eta t}(r)$ を陽子と中性子からの寄与にわけると

$$g_{\ell}^{\eta t}(r)=g_{l}^{\mathrm{n}}(r)+(-)^{\eta+t}g_{\ell}^{\mathrm{p}}(r)$$

と表すことができる。陽子と中性子からの寄与が同じ場合は、$\eta\neq t$ の遷移は起こらないが、それらが異なるときは、遷移が起こることに注意。

7.1.1 $\ell\leq 2$ の場合

8 Coulomb Excitation

中間エネルギー領域のクーロン励起を ECIS のような部分波展開に基づくボルン近似で計算するのは、波数の大きさ、相互作用の到達距離の長さのために、細かいステップで大きな距離まで非常に大きな角運動量の部分波に対して行なわなければならないという点で難しくなる。幸い、コンピュータの計算速度、メモリー空間が大きくなったために、メッシュ数 60000、角運動量 20000$\hbar$ を超える計算が reasonable な時間で可能となった。ここでは、具体的な計算例を示す。

未完

9 Folding model

未完

A　おまけ

A.1　たたみこみ (Folding)

A.1.1　3 次元 Gaussian による 球対称関数の folding

3 次元 Gaussian：

$$\begin{aligned}
g(r) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b^3}\exp\left[-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] \\
\int d^3r\,g(r) &= 1 \\
\int d^3r\,r^2 g(r) &= \frac{3}{2}b^2
\end{aligned}$$

球対称関数 $f(r)$ を 3 次元 Gaussian g で fold した関数 $F(r)$ は

$$\begin{aligned}
F(r) &= \int d^3s\ f(s)\ g(|\vec{r}-\vec{s}|) \\
&= 2\pi\int_0^\infty ds\ s^2\ f(s)\int_{-1}^{1}dx\ \frac{1}{\pi^{3/2}b^3}\exp\left(-\frac{r^2+s^2-2rsx}{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}br}\int_0^\infty ds\ s\ f(s)\left[e^{-\left(\frac{s-r}{b}\right)^2}-e^{-\left(\frac{s+r}{b}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}br}\int_{-\infty}^\infty ds\ s\ f(s)\,e^{-\left(\frac{s-r}{b}\right)^2} \\
f(-s) &\equiv f(s)
\end{aligned}$$

調和振動子型密度分布およびその folding:

$$\begin{aligned}
f(r) &= \frac{Z}{\pi^{3/2}a^3\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)}\left(1+\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\exp\left(-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \\
\int d^3r\ f(r) &= Z \\
\langle r\rangle &= \frac{4(2\alpha+1)}{\sqrt{\pi}(3\alpha+2)}\,a \\
\left\langle r^2\right\rangle &= \frac{3(5\alpha+2)}{2(3\alpha+2)}\,a^2 \\
\langle r^n\rangle &= \frac{n+1}{2}\cdot\frac{(n+3)\alpha+2}{(n+1)\alpha+2}\,a^2\ \left\langle r^{n-2}\right\rangle \\
F(r) &= \frac{Z}{\pi^{3/2}a'^3\left(1+\frac{3}{2}\alpha'\right)}\left(1+\alpha'\left(\frac{r}{a'}\right)^2\right)\exp\left(-\left(\frac{r}{a'}\right)^2\right) \\
a'^2 &= a^2+b^2 \\
\alpha' &= \frac{a^2}{a^2+b^2\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)}\,\alpha \\
a^2 &= a'^2-b^2 \\
\alpha &= \frac{a'^2}{a'^2-b^2\left(1+\frac{3}{2}\alpha'\right)}\,\alpha'
\end{aligned}$$

これらの関係と陽子の電荷の平均自乗半径 ($\sqrt{(3/2)}\,b = 0.85$ fm) を用いると、電子散乱から求められている調和振動子型電荷分布 $F_e(r)$ [5] を調和振動子型の陽子分布 $f_p(r)$ に unfolding できる。

A.1.2 角度分布をなまらせる (2 次元の folding)

計算結果を実験と比較するときに、角度分布を角度分解能でなまらせる必要がある。前方角度は位相空間が $\sin\theta$ で歪んでいるので、単なる平均 (例えば、ECIS の option) を使うのは厳密には正しくない。そこで、以下に角度分解能 σ radian ($\sigma \ll 1$) の gauss 関数でなまらせる表式を与える。

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_{\rm exp})\right]_{\rm exp} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)\right]_{\rm cal} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) \\
\cos\alpha &= \cos\theta_{\rm exp}\cos\theta + \sin\theta_{\rm exp}\sin\theta\sin\phi \\
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \sin^2\frac{\theta_{\rm exp}}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \\
&\quad - 2\sin\frac{\theta_{\rm exp}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta_{\rm exp}}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta_{\rm exp}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\phi\right)
\end{aligned}
$$

3 番目の表式は 2 番目と数学的には同じものであるが、角度が小さいときに桁落ちを気にする場合に利用するとよい。

B 今後の課題

協力者を求む!

- 数値計算的限界がどこにあるかの解明。および突破することが可能か？
- 相対論的効果 (Coulon 場のローレンツ収縮) を取り入れることが可能か？“Dirac” option で解決できるか？
  Dirac option ではだめみたい。
- 入力データを解釈するフィルターがあると便利かも。

参考文献

[1] R.L. Varner, et al., Phys. Rep. 201 (1991) 57.

[2] M. Nolte, H. Machner and J. Bojowald, Phys. Rev. C36 (1987) 1312.

[3] M.N. Harakeh and A.E.L. Dieprink, Phys. Rev. C23 (1981) 2329.

[4] G.R. Satchler, Nucl. Phys. A472 (1987) 215.

[5] H. de Vries, C.W. de Jager, and C. de Vries, Atomic Data and Nuclear Data Tables 36 (1987) 495.

[6] L.C. Biedenharn and M.E. Rose, Rev. Mod. Phys. 25 (1953) 729

[7] H.J. Rose and D.M. Brink, Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 306

目 次

1 Introduction **1**

2 Global Optical Potential **2**

3 Integration step, Matching Radius, Maximum Angular Momentum **2**

4 Vibrational Model と Rotational Model **3**
4.1 Vibrational Model . . . 3
4.2 Rotational Model . . . 4
4.3 注意 . . . 6

5 Coupling Form Factor を外から入力したい **6**
5.1 Isoscalar dipole form factor . . . 10

6 γ 線や崩壊粒子の角度分布、Particle-γ や Particle-Particle 相関を計算したい **10**
6.1 Statistical Tensor . . . 11
6.2 Density Matrix . . . 12
6.3 Angular Correlation . . . 13
6.3.1 Decay from the excited state via direct reaction . . . 13
6.3.2 Angular correlation with intermediate radiaten unobserved . . . 15

7 Collective Form Factor **16**
7.1 Transition Density[4] . . . 16
7.1.1 $\ell \leq 2$ の場合 . . . 16

8 Coulomb Excitation **16**

9 Folding model **16**

A おまけ **17**
A.1 たたみこみ (Folding) . . . 17
A.1.1 3 次元 Gaussian による 球対称関数の folding . . . 17
A.1.2 角度分布をなまらせる (2 次元の folding) . . . 18

B 今後の課題 **18**