実験屋のための実践的核反応論

東大CNS　下浦　享

はじめに

（目標）

「核反応で、何をどうやれば何がどの程度わかるか?」についてのセンスを磨き、実験提案や実験解析に実践的に生かせるようになろう

（素朴な疑問）

- 核反応モデルの背後にある基本的考え方、予言能力、限界は？
- 計算コード（ECIS, DWUCK, ...）は結局何を計算しているのか？
- 手計算で何がわかり、計算コードの出力から何を読み取るのか？
- その他（受講者からの疑問を歓迎する）

（内容）

初日（2コマ）は、主に青色の部分について、非相対論的な散乱の量子論の解説を中心にする

（資料）

プレゼンテーションに加えて、実際の計算のための公式、コードの使い方、advance level の公式などのメモを提供する

Menu

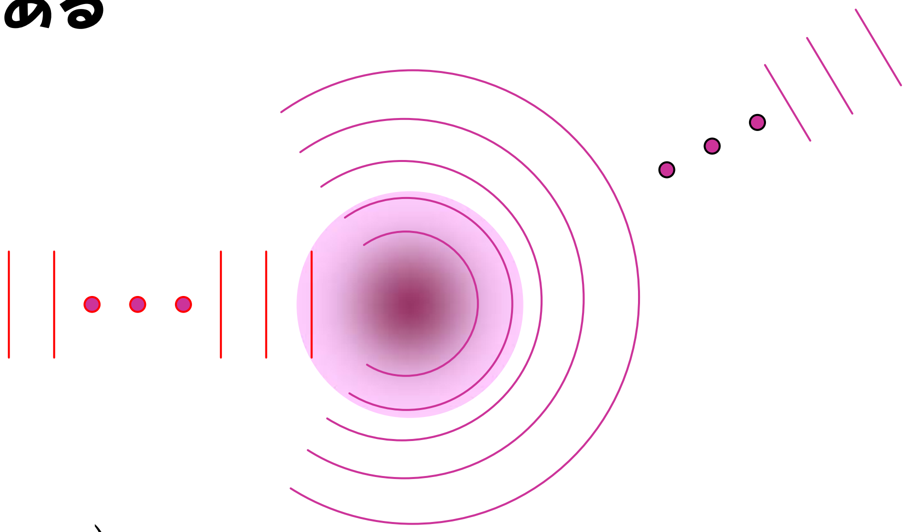
- おさらい
- Distortion
  - 核子あたり 100 MeV 以上の陽子衝突を除いて、平面波ボルン近似の criterion は満たさない
  - 別の近似方法：Eikonal 近似
  - 相互作用領域で、どれくらい波が歪んでいるのか？
  - 歪んだ波を用いた近似は？ (DWBA)
- 非弾性散乱と $B(O\lambda)$
  - Isovector と Isoscalar
  - Bernstein’s Prescription
  - 核応答
  - 集団性、相関
- Spectroscopic Factor について
  - ANCとSpectroscopic factor
- DWBAコードの使い方、注意点

おさらい

a+A → (b+B) 反応

この反応を含む、a+Aで入射する核反応を記述する波動関数は、漸近形が以下の条件を満たさなければならない

- すべての開いたチャンネルには、原点から外向きに広がる波がある
- 入射チャンネルだけに入射平面波がある
- 入射平面波以外に内向きの波はない
- 閉じたチャンネルの振幅は0である



これらの条件を満たす波動関数

$$\Psi_\alpha^{(+)} \to \varphi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha\right)\phi_a\phi_A + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\beta \frac{\exp\left(ik_\beta r_\beta\right)}{r_\beta} f_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta\right)\phi_\beta + (> 2\mathrm{body})$$

$$\phi_\beta = \phi_b\phi_B$$

$\boxed{f_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta\right): \text{Scattering Amplitude}}$

おさらい

2体の重心系（$a+A=\alpha$チャンネル）のハミルトニアン、固有関数

$$H = h_a(\xi_a) + h_A(\xi_A) + h_\alpha(\vec{r}_\alpha, \xi_a, \xi_A) = H_\alpha + V_\alpha$$

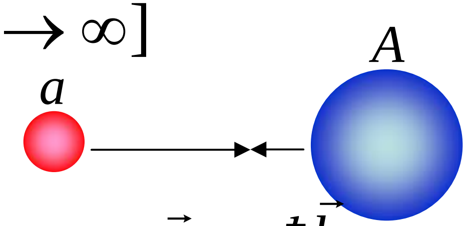
$$H\Psi = E\Psi\ ;\ h_\alpha(\vec{r}_\alpha, \xi_a, \xi_A) = T_\alpha(\vec{r}_\alpha) + V_\alpha(\vec{r}_\alpha, \xi_a, \xi_A)$$

$$h_\alpha(\vec{r}_\alpha, \xi_a, \xi_A) \to T_\alpha(\vec{r}_\alpha) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha}\nabla_\alpha^2 \quad [\vec{r}_\alpha \to \infty]$$

$$h_a(\xi_a)\phi_a(\xi_a) = \varepsilon_a\phi_a(\xi_a)\ ;\ h_A(\xi_A)\phi_A(\xi_A) = \varepsilon_A\phi_A(\xi_A)$$

$$\Phi_\alpha = \phi_a(\xi_a)\phi_A(\xi_A)\varphi(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha)$$

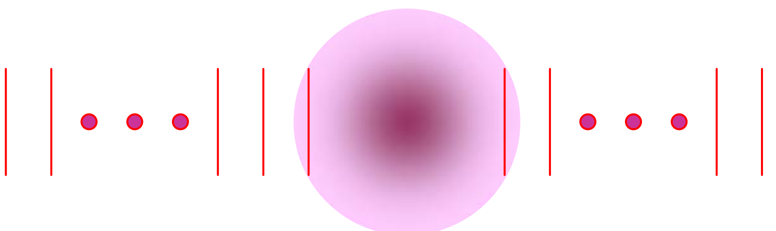
: an eigen function of H_{tot} at $[\vec{r}_\alpha \to \infty]$



$\mu_\alpha\ ;\ \vec{p}_\alpha = \hbar\vec{k}_\alpha$

$$\varphi(\vec{k}, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

: Incoming Plane wave

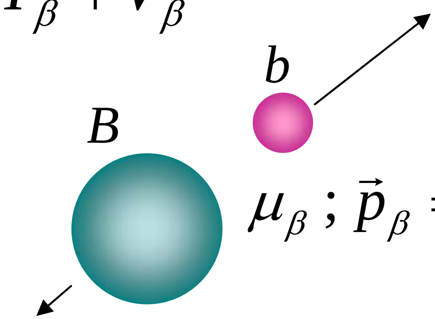


$$E_{tot} = \varepsilon_a + \varepsilon_A + \frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2\mu_\alpha}$$

$(a+A) \rightarrow b+B$ 反応： $b+B$ チャンネルのハミルトニアン

おさらい

$$H = h_a(\xi_a) + h_A(\xi_A) + h_\alpha(\vec{r}_\alpha, \xi_a, \xi_A)$$
$$= h_b(\xi_b) + h_B(\xi_B) + h_\beta(\vec{r}_\beta, \xi_b, \xi_B) = H_\beta + V_\beta$$



$$\mu_\beta \; ; \; \vec{p}_\beta = \hbar \vec{k}_\beta$$

$$h_\beta(\vec{r}_\beta, \xi_b, \xi_B) = T_\beta(\vec{r}_\beta) + V_\beta(\vec{r}_\beta, \xi_b, \xi_B)$$

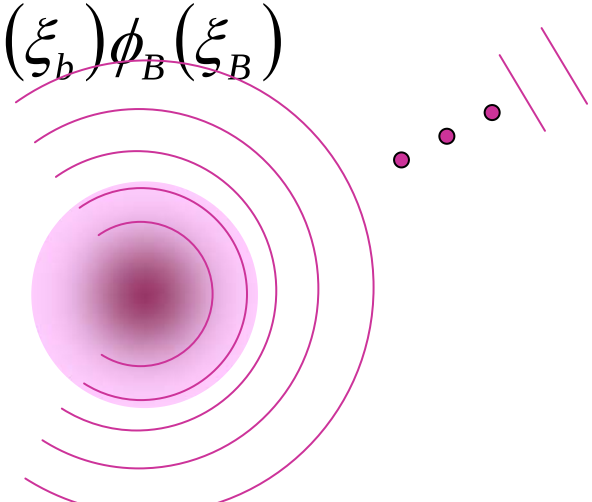
$$h_\beta(\vec{r}_\beta, \xi_b, \xi_B) \rightarrow T_\beta(\vec{r}_\beta) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta}\nabla_\beta^2 \quad [\vec{r}_\beta \rightarrow \infty]$$

$$h_b(\xi_b)\phi_b(\xi_b) = \varepsilon_b \phi_b(\xi_b) \; ; \; h_B(\xi_B)\phi_B(\xi_B) = \varepsilon_B \phi_B(\xi_B)$$

$$\Phi_\beta = \varphi(\vec{k}_\beta, \vec{r}_\beta)\phi_b(\xi_b)\phi_B(\xi_B) \text{ and}$$

$$\Phi_\beta^{sc} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\exp(ik_\beta r_\beta)}{r_\beta} f_{\beta\alpha}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta)\phi_b(\xi_b)\phi_B(\xi_B)$$

: eigen functions at $[\vec{r}_\beta \rightarrow \infty]$



$$E_{tot} = \varepsilon_a + \varepsilon_A + \frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2\mu_\alpha} = \varepsilon_b + \varepsilon_B + \frac{\hbar^2 k_\beta^2}{2\mu_\beta}$$

Lippmann-Schwinger Equation

境界条件を含んだ積分方程式

$$H\Psi_\alpha^{(+)}(E) = E\Psi_\alpha^{(+)}(E)$$

$$H = (h_a + h_A + T_\alpha) + V_\alpha = H_\alpha + V_\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi_\alpha^{(+)}(E) &= \Phi_\alpha(E) + \frac{1}{E - H_\alpha + i\eta} V_\alpha \Psi_\alpha^{(+)}(E) \\ &= \frac{i\eta}{E - H + i\eta}\Phi_\alpha(E)\end{aligned}}$$

外向き球面波をもつ解

$$\boxed{\Psi_\alpha^{(-)}(E) = \Phi_\alpha(E) + \frac{1}{E - H_\alpha - i\eta} V_\alpha \Psi_\alpha^{(-)}(E)}$$

内向き球面波をもつ解

$$S_{\beta\alpha} = \left\langle \Psi_\beta^{(-)}(E) \middle| \Psi_\alpha^{(+)}(E) \right\rangle$$

散乱行列(S行列)：
平面波 Φ_β が見出される確率振幅

おさらい

T 行列、微分断面積、散乱振幅

$$T_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_\beta\right)=\boxed{\left\langle\Phi_\beta\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)\right|}V_\beta\left(\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)\left|\Psi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha,\cdots\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Post\ Form}$$

$$=\left\langle\Psi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta,\cdots\right)\right|V_\alpha\left(\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\boxed{\left|\Phi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\right\rangle}$$

$$:\mathrm{Prior\ Form}$$

平面波

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega_\beta}=\frac{v_\beta}{v_\alpha}\left|f_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_\beta\right)\right|^2$$

$$f_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_\beta\right)=-\frac{(2\pi)^2\mu_\beta}{\hbar^2}T_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_\beta\right)$$

T行列が計算できれば、微分断面積が計算できる

平面波ボルン近似 (PWBA)

$$\Psi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha,\cdots\right)=\Phi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)+\ldots$$ 外向き球面波

$$\Psi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta,\cdots\right)=\Phi_\beta\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)+\ldots$$ 内向き球面波

$$T_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_\beta\right)\approx\left\langle\Phi_\beta\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)\middle|V_\beta\left(\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)\middle|\Phi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Post\ Form}$$

$$\approx\left\langle\Phi_\beta\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)\middle|V_\alpha\left(\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\middle|\Phi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Prior\ Form}$$

平面波ボルン近似 (PWBA)

おさらい

弾性散乱

$$T_{\alpha\alpha}\left(\vec{k},\vec{k}'\right)\approx\frac{V_0R^3}{2\pi^2}\exp\left(-(qa)^2\right)\left[\frac{j_1(qR)}{qR}+2\left(\frac{a}{R}\right)^2 j_0(qR)\right]$$

非弾性散乱

$$T^{l}_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k},\vec{k}'\right)\approx\frac{1}{2\pi^2}\int r^2dr\ j_l(qr)V_T(r)Y_{l0}(\hat{q})\approx\frac{V_0\beta_lR^3}{2\pi^2}j_l(qR)Y_{l0}(\hat{q})\quad[a\to 0]$$

$$T^{l=2}_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k},\vec{k}'\right)\approx\frac{V_0\beta_2R^3}{2\pi^2}Y_{l0}(\hat{q})\exp\left(-(qa)^2\right)\times$$

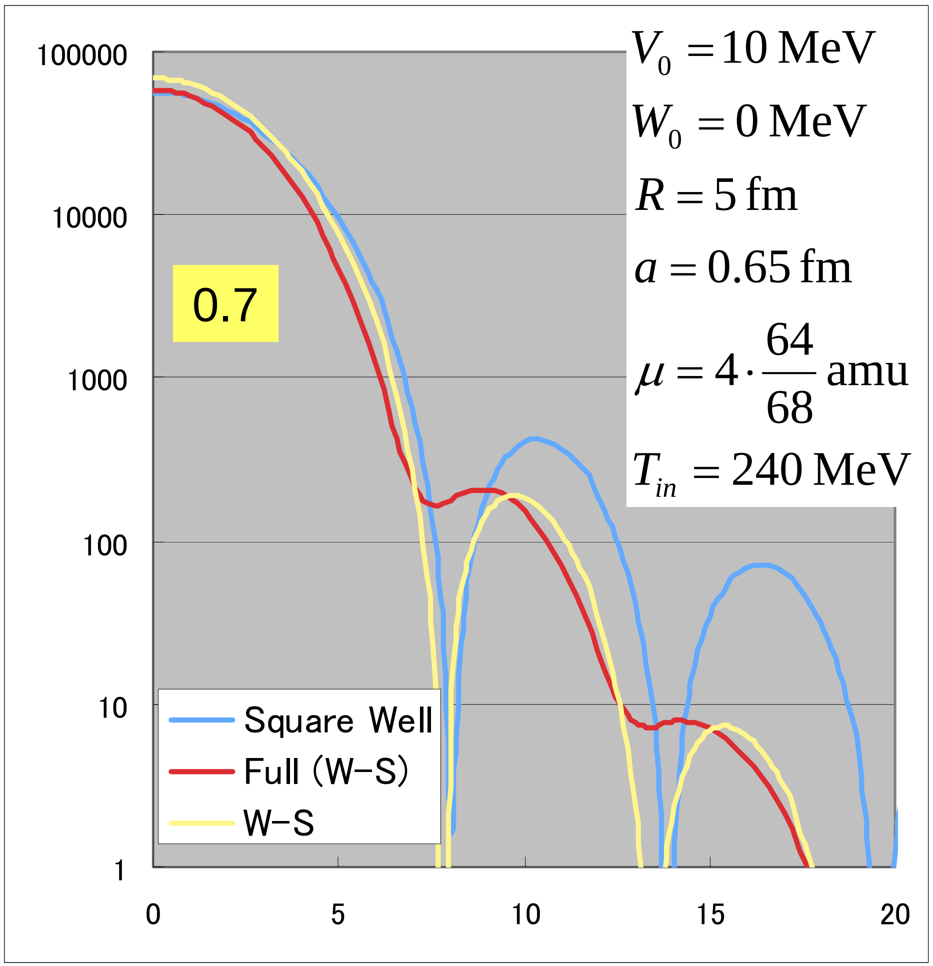
$$\left[j_2(qR)+4\left(\frac{a}{R}\right)^2 qR\,j_1(qR)+4\left(\frac{a}{R}\right)^4(qR)^2 j_0(qR)\right]$$

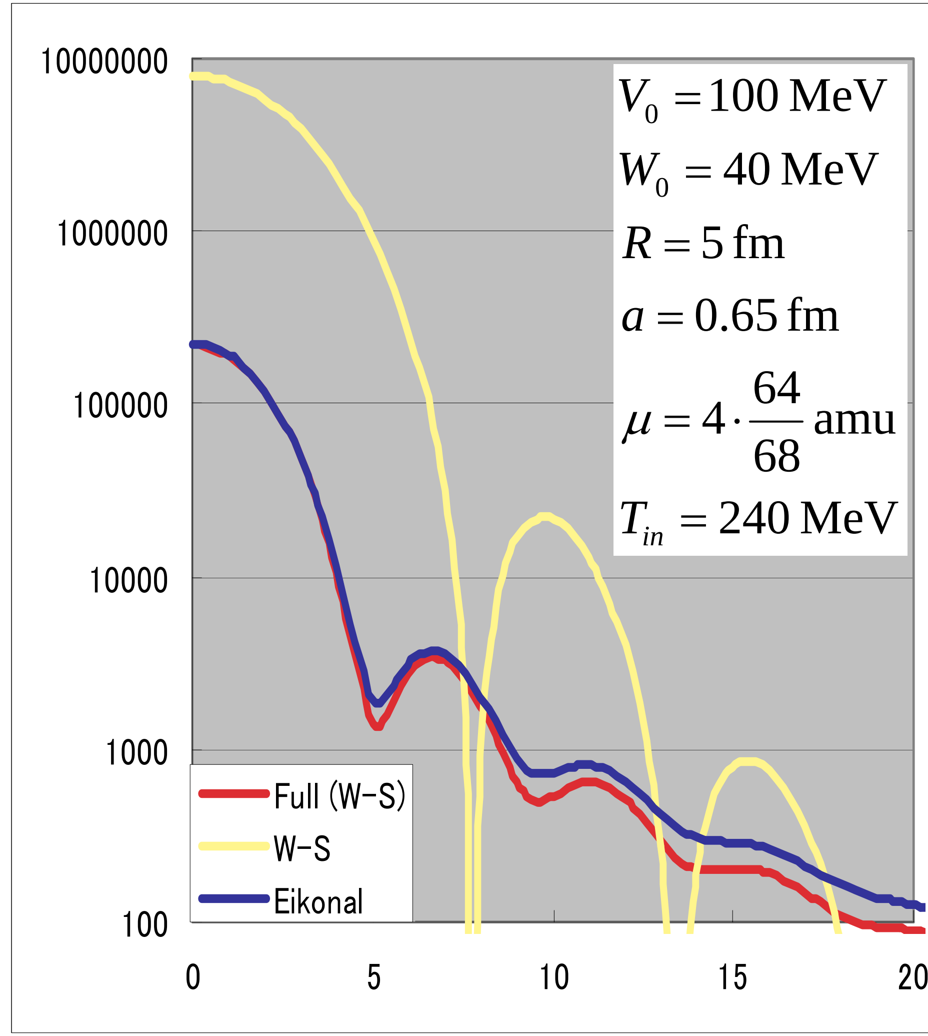
$$V_T(r)=-\beta_l\frac{r^{l-1}}{R^{l-2}}\frac{dV(r)}{dr}\quad:\ \text{Tassie Form}$$

$$V(r)=\int_r^\infty dt\frac{V_0}{\sqrt{2\pi}(2a^2)}\exp\left[-\frac{(t-R)^2}{4a^2}\right]\approx\frac{V_0}{1+\exp[(r-R)/a]}$$

弾性散乱の平面波ボルン近似

$$V(r) = -\frac{V_0 + iW_0}{1+\exp[(r-R)/a]}$$





Distortion, Eikonal, DWBA

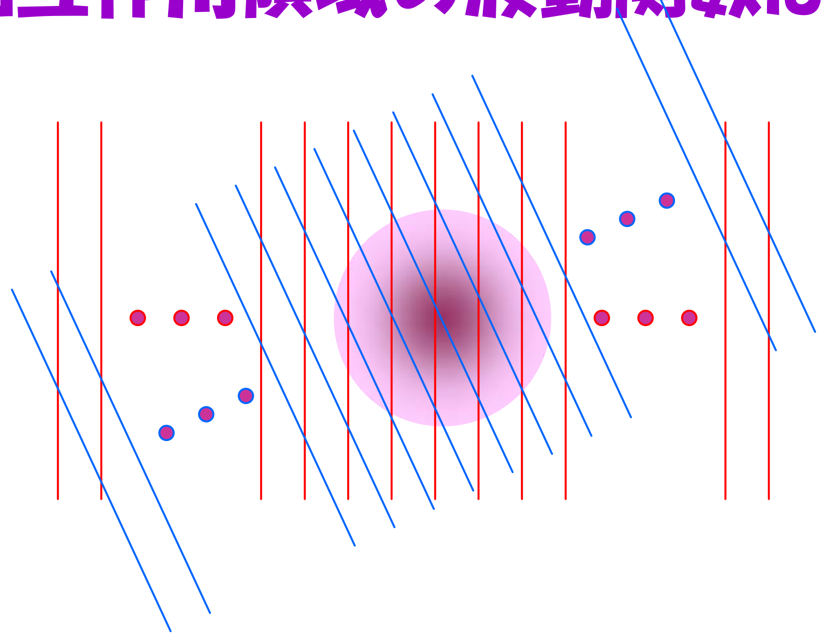
Born近似のCriterion:

$$-\frac{\mu}{\hbar^2 k}\int_0^\infty \left(e^{2ikr}-1\right)V(r)dr \approx \frac{\mu V_0}{\hbar^2}\frac{R}{k} = \frac{V_0 R}{\hbar v_{rel}} << 1$$

$$\hbar v_{rel} \sim 60-200\ \mathrm{MeV\ fm}\ ;\ V_0 R \sim 40\times A_{proj}\times 3\ \mathrm{MeV\ fm}$$

ほとんどみたされない！

相互作用領域の波動関数は平面波とかなり違う



PWBAは、吸収の効果
（別のチャンネルへのflux）
をとりこめない

$$mfp = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu W}}\ \mathrm{fm}$$

$$\sim \frac{1.4}{A_p}\ \mathrm{fm}\ (\mathrm{for}\ W \sim 20 A_p\ \mathrm{MeV})$$

$\Psi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha, \xi_\alpha, \cdots\right)$, $\Psi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta, \vec{r}_\beta, \xi_\beta, \cdots\right)$ のよりよい近似は？

弾性・非弾性散乱

相対座標、内部座標、相互作用演算子が共通

$$T_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_{\alpha'}\right)=\left\langle \Phi_{\alpha'}\left(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r},\xi\right)\middle| V\left(\vec{r},\xi\right)\middle| \Psi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r},\xi,\cdots\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Post\ Form}:\mathrm{Fourier\ component\ of}\ V\,\Psi_\alpha^{(+)}$$

$$=\left\langle \Psi_{\alpha'}^{(-)}\left(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r},\xi,\cdots\right)\middle| V\left(\vec{r},\xi\right)\middle| \Phi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Prior\ Form}:\mathrm{Fourier\ component\ of}\ V\,\Psi_{\alpha'}^{(-)}$$

$$\frac{d\sigma_{\alpha'\alpha}}{d\Omega_\alpha}=\frac{v_{\alpha'}}{v_\alpha}\left|f_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_{\alpha'}\right)\right|^2$$

$$f_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_{\alpha'}\right)=-\frac{(2\pi)^2\mu}{\hbar^2}T_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_{\alpha'}\right)$$

T行列は、VΨの Fourier 成分で表現される

弾性・非弾性散乱の Eikonal近似（Glauber 模型）

$$H=\left(h(\xi)+T(\vec{r})\right)+V(\vec{r},\xi)$$

$$h(\xi)\phi_\alpha(\xi)=\varepsilon_\alpha\phi_\alpha(\xi)\ ;\ h(\xi)\phi_{\alpha'}(\xi)=\varepsilon_{\alpha'}\phi_{\alpha'}(\xi)$$ 内部波動関数

$$T(\vec{r})\varphi_\alpha(\vec{k}_\alpha,\vec{r})=\frac{\hbar^2k_\alpha^2}{2\mu}\varphi_\alpha(\vec{k}_\alpha,\vec{r})\ ;T(\vec{r})\varphi_{\alpha'}(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r})=\frac{\hbar^2k_{\alpha'}^2}{2\mu}\varphi_{\alpha'}(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r})$$ 平面波

$$\boxed{\frac{\hbar^2k_\alpha^2}{2\mu}\approx\frac{\hbar^2k_{\alpha'}^2}{2\mu}>>\varepsilon_{\alpha'}-\varepsilon_\alpha:\text{adiabatic approx.}\ ;|V|<<\frac{\hbar^2k_\alpha^2}{2\mu}}$$

$$\vec{q}=\vec{k}_\alpha-\vec{k}_{\alpha'}\ ;\ \vec{q}\cdot\vec{r}\approx\vec{q}\cdot\vec{b}$$

$$\Psi_\alpha^{(+)}=\varphi_\alpha(\vec{k}_\alpha,\vec{r})\cdot f(\vec{r},\xi)\quad\Rightarrow\quad -i\frac{\hbar^2}{\mu}k_\alpha\frac{\partial f}{\partial z}+Vf=0$$

$$\boxed{\Psi_\alpha^{(+)}\approx\phi_\alpha(\xi)\varphi_\alpha(\vec{k}_\alpha,\vec{r})\exp\left[-\frac{i}{\hbar v_\alpha}\int_{-\infty}^{z}dz'V(\vec{b},z',\xi)\right]}$$ (∗)

$$V\,\Psi_\alpha^{(+)}\approx i\hbar v_\alpha e^{i\vec{k}_\alpha\cdot\vec{r}}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\exp\left[-\frac{i}{\hbar v_\alpha}\int_{-\infty}^{z}dz'V(\vec{b},z',\xi)\right]\right\}$$

弾性・非弾性散乱の Eikonal近似 (Glauber 模型)

$$T_{\alpha'\alpha} = \frac{\hbar v_\alpha}{i(2\pi)^3}\int d^2b \exp\left(i\vec{q}\cdot\vec{b}\right)\left\langle \phi_{\alpha'}(\xi)\middle| 1-\Gamma\left(\vec{b},\xi\right)\middle|\phi_\alpha(\xi)\right\rangle_\xi$$

$$\Gamma\left(\vec{b},\xi\right) = \exp\left[i\,\chi\left(\vec{b},\xi\right)\right] \;:\; \text{Profile function}$$

$$\chi\left(\vec{b},\xi\right) = \frac{-1}{\hbar v_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,V\left(\vec{b},z,\xi\right) \;:\; \text{Phase shift function}$$

•相互作用の無限次のべきを含んでいる
•核子ー核子散乱の積み重ねでも記述が可能
•分解反応へも応用される

軸対称相互作用なら

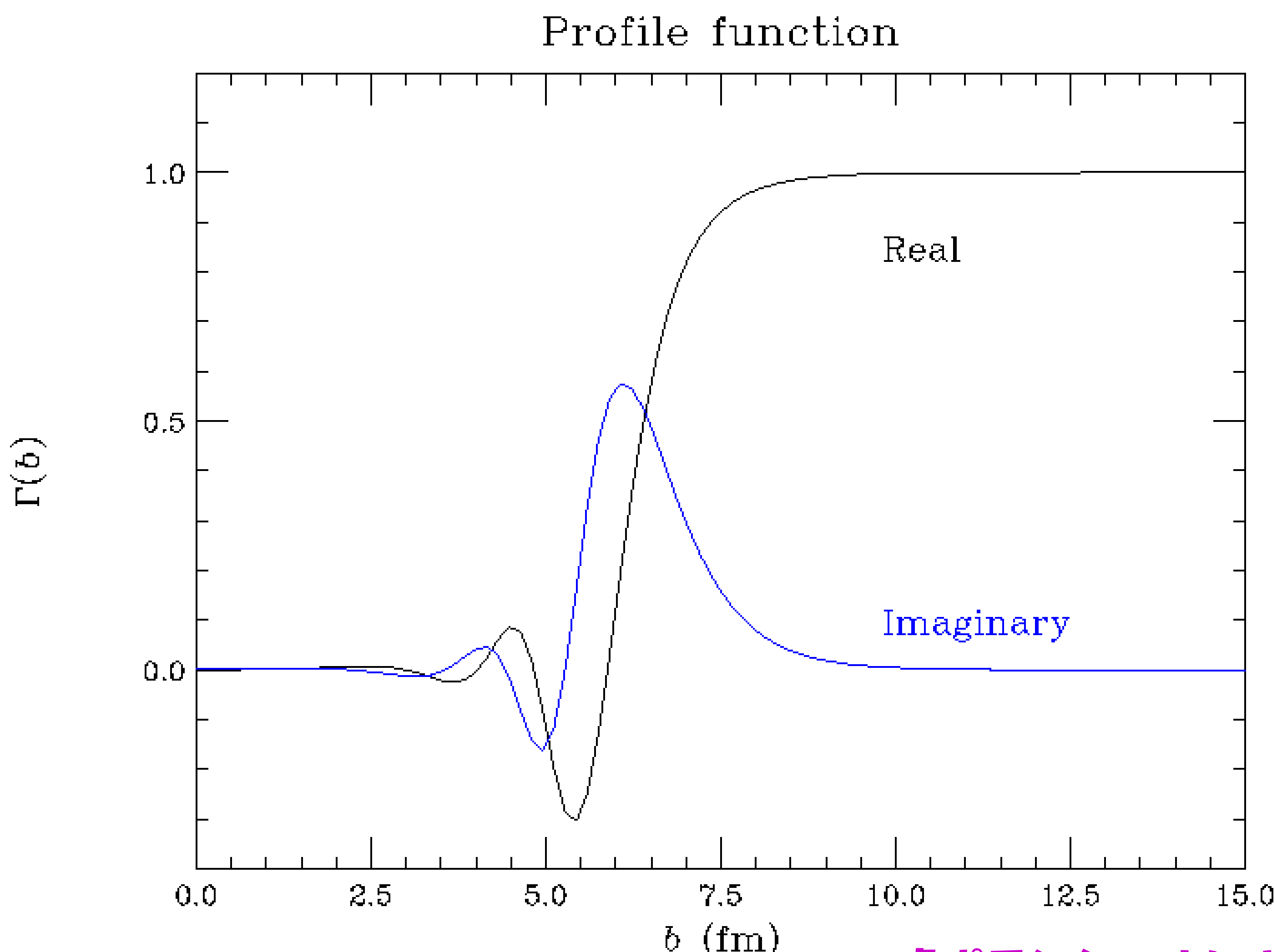
$$T_{\alpha'\alpha} = \frac{\hbar v_\alpha}{i(2\pi)^2}\int_0^{\infty} b\,db\,J_0(qb)\left\langle \phi_{\alpha'}(\xi)\middle| 1-\Gamma(b,\xi)\middle|\phi_\alpha(\xi)\right\rangle_\xi$$

Elastic :

$$f_{\alpha\alpha}(\theta) = ik_\alpha\int_0^{\infty} b\,db\,J_0(qb)\left[1-\Gamma(b)\right] \rightarrow \frac{iR}{\theta}J_1(k_\alpha R\theta) \;:\; \text{Black Disk}$$

Profile function の2次元フーリエ変換 (普通のベッセル関数)

弾性散乱の Eikonal近似(例) (Profile function)



$V_0 = 100\,\mathrm{MeV}$

$W_0 = 40\,\mathrm{MeV}$

$R = 5\,\mathrm{fm}$

$a = 0.65\,\mathrm{fm}$

$\mu = 4 \cdot \dfrac{64}{68}\,\mathrm{amu}$

$T_{in} = 240\,\mathrm{MeV}$

$k = 6.39\,\mathrm{fm}^{-1}$

$\beta = 0.359$

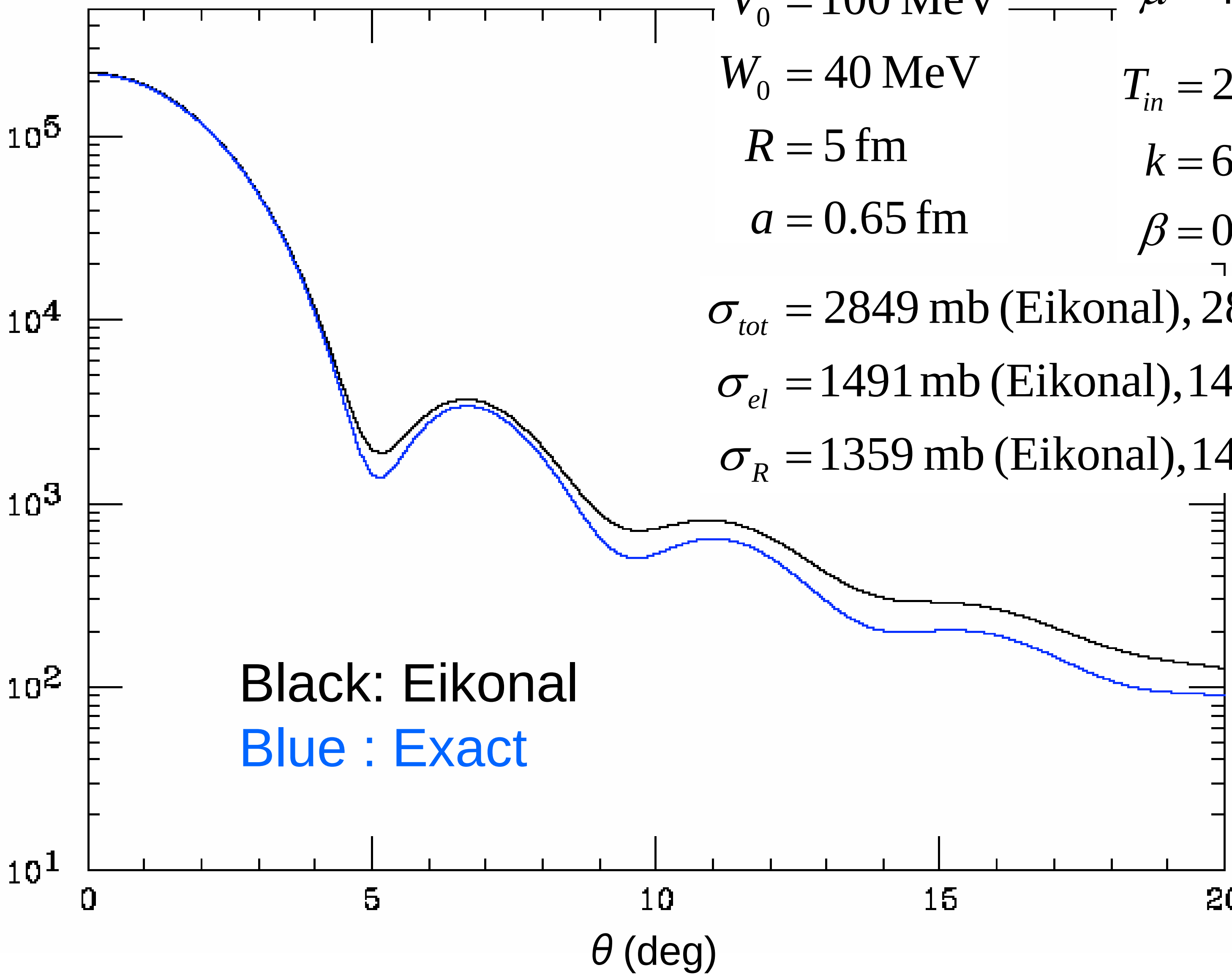
虚ポテンシャルによる吸収効果
実ポテンシャルによる位相の変化

弾性散乱の Eikonal近似(例) (Glauber 模型)

$$V_0 = 100\,\mathrm{MeV}$$
$$W_0 = 40\,\mathrm{MeV}$$
$$R = 5\,\mathrm{fm}$$
$$a = 0.65\,\mathrm{fm}$$

$$\mu = 4 \cdot \frac{64}{68}\,\mathrm{amu}$$
$$T_{in} = 240\,\mathrm{MeV}$$
$$k = 6.39\,\mathrm{fm}^{-1}$$
$$\beta = 0.359$$

$$\sigma_{tot} = 2849\,\mathrm{mb}\ (\mathrm{Eikonal}),\ 2861\,\mathrm{mb}\ (\mathrm{Exact})$$
$$\sigma_{el} = 1491\,\mathrm{mb}\ (\mathrm{Eikonal}),\ 1431\,\mathrm{mb}\ (\mathrm{Exact})$$
$$\sigma_{R} = 1359\,\mathrm{mb}\ (\mathrm{Eikonal}),\ 1431\,\mathrm{mb}\ (\mathrm{Exact})$$



弾性散乱が光学ポテンシャルで記述できるなら

$$\Psi_{\alpha}^{(+)}\left(\vec{k}_{\alpha}, \vec{r}_{\alpha}, \xi_{\alpha}, \cdots\right), \ \Psi_{\beta}^{(-)}\left(\vec{k}_{\beta}, \vec{r}_{\beta}, \xi_{\beta}, \cdots\right)$$ の近似として

- 弾性散乱チャネルの波動関数、散乱振幅はポテンシャル問題を解けばよい。
- a+A → b+B 反応を記述するΨの主要成分が弾性散乱だとすると、Ψの近似として、ポテンシャル問題の解を用いればよさそう。
- Ψを、(平面波＋球面波)ではなく、(弾性散乱による散乱波)+(球面波)と書き直す。 (弾性散乱による散乱波)を、**歪曲波**と呼ぶ。
- DWBAの計算コードなどでは、歪曲波を多重極展開して求めるが、エネルギーの高い反応では、部分波の角運動量が大きくなり、見通しがよくない。kb~(l+1/2)
- 以後、Eikonal近似で得られた波動関数を用いた記述を試みる。角運動量表示による厳密なものは教科書(Satchler, 河合・吉田など)を参照のこと

歪曲波（Eikonal 近似）

$$V(r) = -\frac{V_0 + iW_0}{1+\exp[(r-R)/a]}$$

$V_0 = 100\,\mathrm{MeV}$

$W_0 = 40\,\mathrm{MeV}$

$R = 5\,\mathrm{fm}$

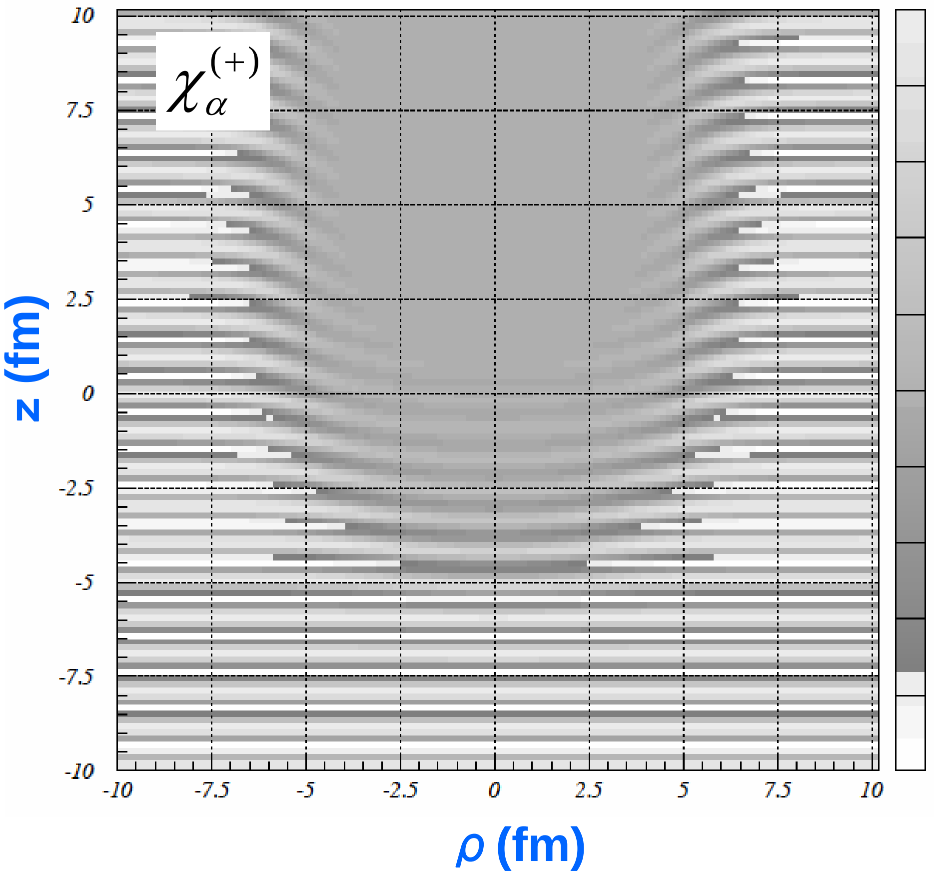
$a = 0.65\,\mathrm{fm}$

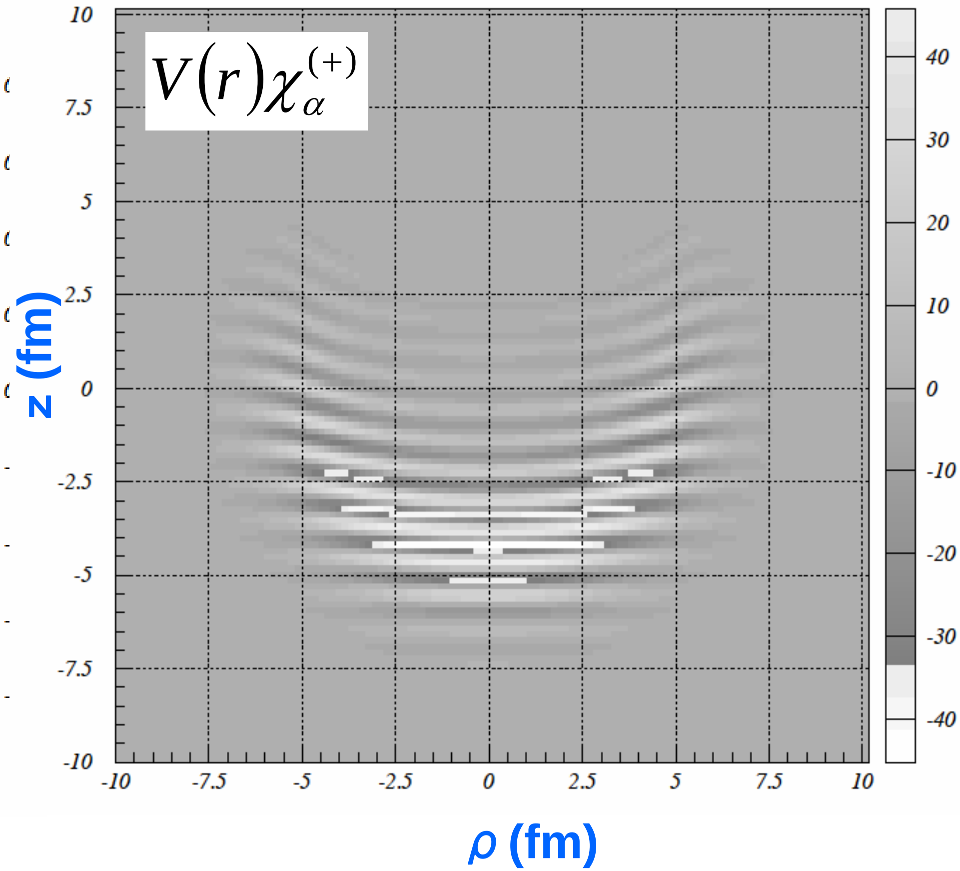
$\mu = 4\cdot\frac{64}{68}\,\mathrm{amu}$

$T_{in} = 240\,\mathrm{MeV}$

$k = 6.39\,\mathrm{MeV/c}$

$\beta = 0.359$





歪曲波を用いた表式

相互作用の繰り込み
（光学ポテンシャル）

$$H\Psi_\alpha^{(+)} = E\Psi_\alpha^{(+)}$$

$$H = (h_a + h_A + T_\alpha) + V_\alpha = H_\alpha + V_\alpha = H_\alpha + U_\alpha + \boxed{\hat{V}_\alpha}$$

$$\chi_\alpha^{(+)}(\vec{r}) = \varphi(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha) + \frac{1}{E - (T_\alpha + U_\alpha) + i\eta} U_\alpha \chi_\alpha^{(+)}(\vec{r})$$

外向き歪曲波

$$\chi_\alpha^{(-)}(\vec{r}) = \varphi(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha) + \frac{1}{E - (T_\alpha + U_\alpha) - i\eta} U_\alpha \chi_\alpha^{(-)}(\vec{r})$$

内向き歪曲波

$$T_{\beta\alpha}(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta) = \left\langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{k}_\beta, \vec{r}_\beta)\phi(\xi_\beta) \middle| \hat{V}_\beta(\vec{r}_\beta, \xi_\beta) \middle| \Psi_\alpha^{(+)}(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha, \xi_\alpha, \cdots) \right\rangle$$

$:\mathrm{Post\ Form}$

$$= \left\langle \Psi_\beta^{(-)}(\vec{k}_\beta, \vec{r}_\beta, \xi_\beta, \cdots) \middle| \hat{V}_\alpha(\vec{r}_\alpha, \xi_\alpha) \middle| \chi_\alpha^{(+)}(\vec{k}_\alpha, \vec{r}_\alpha)\phi(\xi_\alpha) \right\rangle$$

$:\mathrm{Prior\ Form}$

正確な表式

歪曲波ボルン近似(DWBA)

$$\Psi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha,\cdots\right)=\chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha\right)\phi_\alpha\left(\xi_\alpha\right)+\ldots$$

$$\Psi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta,\xi_\beta,\cdots\right)=\chi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta\right)\phi_\beta\left(\xi_\beta\right)+\ldots$$

$$T_{\beta\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_\beta\right)\approx\left\langle\chi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta\right)\phi_\beta\left(\xi_\beta\right)\middle|\hat{V}_\beta\left(\vec{r}_\beta,\xi_\beta\right)\middle|\chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha\right)\phi_\alpha\left(\xi_\alpha\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Post\ Form}$$

$$=\left\langle\chi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta\right)\phi_\beta\left(\xi_\beta\right)\middle|\hat{V}_\alpha\left(\vec{r}_\alpha,\xi_\alpha\right)\middle|\chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha\right)\phi_\alpha\left(\xi_\alpha\right)\right\rangle$$

$$:\mathrm{Prior\ Form}$$

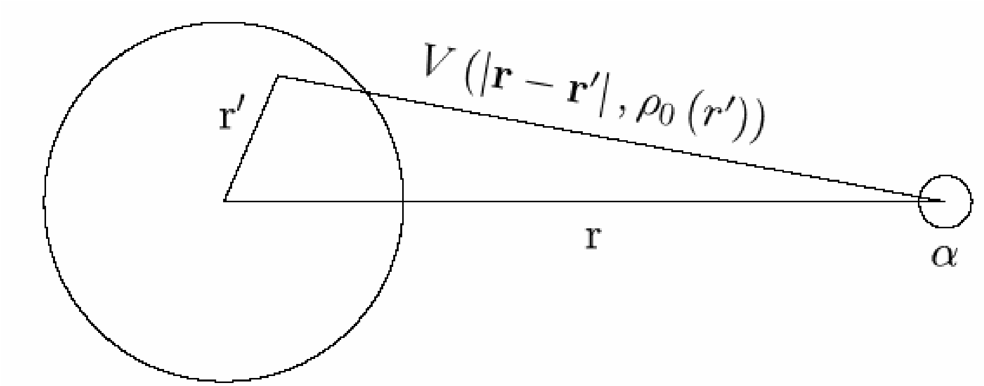
$$\equiv\left\langle\chi_\beta^{(-)}\left(\vec{k}_\beta,\vec{r}_\beta\right)\middle|F_{\beta\alpha}^{(\gamma)}\left(\vec{r}_\alpha,\vec{r}_\beta\right)\middle|\chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}_\alpha\right)\right\rangle\quad(\gamma=\alpha\ \mathrm{or}\ \beta)$$

$$F_{\beta\alpha}^{(\gamma)}\left(\vec{r}_\alpha,\vec{r}_\beta\right)=\left\langle\phi_\beta\left(\xi_\beta\right)\middle|\hat{V}_\gamma\left(\vec{r}_\alpha,\vec{r}_\beta,\xi_{\alpha\beta}\right)\middle|\phi_\alpha\left(\xi_\alpha\right)\right\rangle_{\xi_{\alpha\beta}}\quad:\mathrm{Form\ Factor}$$

歪曲波と形状因子を計算すればよい

歪曲波をつくる光学ポテンシャル

現象論的ポテンシャル (B-G, CH89, etc.)
Folding **模型** (JLM, etc.)



$$U(r)=\int d\mathbf{r}' V\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\rho_0(r')\right)\rho_0(r'),$$

$$\begin{aligned} V\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\rho_0(r')\right) &= -V\left(1+\beta_V\rho_0(r')^{2/3}\right)\exp\left(-|r-r'|^2/\alpha_V\right)\\ &\quad -iW\left(1+\beta_W\rho_0(r')^{2/3}\right)\exp\left(-|r-r'|^2/\alpha_W\right), \end{aligned}$$

Alpha particle at 140-400 MeV: U ~ 130 – 60 MeV, W ~ 25 – 40 MeV
Proton at 50-200 MeV : U ~ 50 – a few MeV, W ~ 10 – 20 MeV (see JLM)

非弾性散乱の形状因子

相対座標、内部座標、相互作用演算子が共通

$$T_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_{\alpha'}\right) = \left\langle \chi^{(-)}_{\alpha'}\left(\vec{k}_{\alpha'}, \vec{r}\right) \middle| F^{(\gamma)}_{\alpha'\alpha}\left(\vec{r}\right) \middle| \chi^{(+)}_{\alpha}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{r}\right) \right\rangle$$

$$F^{(\gamma)}_{\alpha'\alpha}\left(\vec{r}\right) = \left\langle \phi_{\alpha'}\left(\xi\right) \middle| \hat{V}_\gamma\left(\vec{r}, \xi\right) \middle| \phi_\alpha\left(\xi\right) \right\rangle_\xi$$

巨視的模型

$$U_\alpha\left(\vec{r}, R\right) \approx U_{\alpha'}\left(\vec{r}, R\right)$$

$$\hat{V}_\gamma\left(\vec{r}, \xi\right) = U_\alpha\left(\vec{r}, R\right) - U_\alpha\left(\vec{r}, R_0\right)$$

$$R = R(\Omega) = R_0\left(1 + \sum_{\ell m} \alpha_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\Omega)\right)$$

非弾性散乱（振動模型の形状因子）

表面振動

$$\hat{V}_{\gamma}(\vec{r},\xi) = R_0 \left.\frac{dU(r,R)}{dR}\right|_{R=R_0} \sum_{\ell m} \alpha_{\ell m} Y^{*}_{\ell m}(\Omega)$$

$$= -R_0 \frac{dU(r,R_0)}{dr} \sum_{\ell m} \alpha_{\ell m} Y^{*}_{\ell m}(\Omega)$$

$$\alpha_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} \beta_{\ell} \left\{ a^{+}_{\ell m} + (-)^{m} a_{\ell,-m} \right\}$$

1フォノン励起の形状因子

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = (I_A M_A \ell m | I_{A*} M_{A*}) \frac{\beta_{\ell} R_0}{\sqrt{2\ell+1}} \left.\frac{dU(r,R)}{dR}\right|_{R=R_0} Y^{*}_{\ell m}(\Omega)$$

$$F^{Tas}_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = (I_A M_A \ell m | I_{A*} M_{A*}) \frac{\beta_{\ell} R_0}{\sqrt{2\ell+1}} \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\ell-1} \left.\frac{dU(r,R)}{dR}\right|_{R=R_0} Y^{*}_{\ell m}(\Omega)$$

T行列は、 βR に比例する：断面積の大きさ⇔（βR）^{2}

非弾性散乱（回転模型の形状因子）

軸対称変形

$$R = R(\Omega') = R_0\left(1 + \sum_\lambda \alpha_{\lambda 0} Y^*_{\lambda 0}(\Omega')\right)$$

$$U(\vec{r}, R) = \sum_\ell \hat{V}_\ell(r, \{\alpha_{\lambda 0}\}) Y^*_{\ell 0}(\Omega')$$

W-S 形状因子のメモ
（前回配布）を参照

$$\hat{V}_\ell(r, \{\alpha_{\lambda 0}\}) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega' U(\vec{r}, R) Y_{\ell 0}(\Omega')$$

偶偶核回転励起（0 -> I）の形状因子

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{8\pi^2}{2I+1}}\hat{V}_I(r, \{\alpha_{\lambda 0}\}) Y^*_{Im}(\Omega)$$

奇核などK量子数をもつ場合

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = (K\, K\, \ell 0 \,|\, I'\, K)\sqrt{\frac{8\pi^2}{2\ell+1}}\hat{V}_\ell(r, \{\alpha_{\lambda 0}\}) Y^*_{\ell m}(\Omega)$$

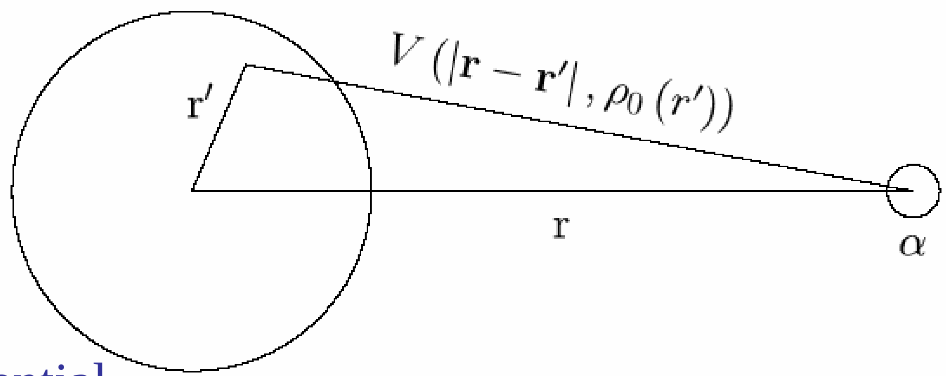
非弾性散乱（微視的アプローチ）

遷移密度からスタート

$$
\begin{aligned}
M_{a\to b} &= \left\langle \Psi_b\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_A\right)\middle| F \middle| \Psi_a\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_A\right)\right\rangle \\
&= \sum_i \left\langle \Psi_b\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_A\right)\middle| f\left(\vec{r}_i\right) \middle| \Psi_a\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_A\right)\right\rangle \\
&= \sum_i \int d^3r\ f\left(\vec{r}\right) \left\langle \Psi_b \middle| \delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) \middle| \Psi_a \right\rangle \\
&= \int d^3r\ f\left(\vec{r}\right) \sum_i \int \prod_j d^3r_j\ \delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) \Psi_b^+ \Psi_a \\
&= \int d^3r\ f\left(\vec{r}\right) \rho_{tr}\left(\vec{r}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\rho_{tr}\left(\vec{r}\right) = \sum_i \int \prod_j d^3r_j\ \delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) \Psi_b^+ \Psi_a
$$

非弾性散乱（微視的アプローチ）



Transition Potential
=形状因子 F

Transition Density

$$\boxed{\delta U(r,E)} = \int d\mathbf{r}' \boxed{\delta\rho_L\left(\mathbf{r}',E\right)} \left[V\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|, \rho_0\left(r'\right)\right) + \rho_0\left(r'\right) \frac{\partial V\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|, \rho_0\left(r'\right)\right)}{\partial \rho_0\left(r'\right)} \right],$$

Transition density に対する Collective model

Compression mode

$$\delta\rho_{L=0}(r,E) = -\alpha_0(E)\left(3 + r\frac{d}{dr}\right)\rho_0(r),$$

$$\delta\rho_{L=1}(r,E) = -\frac{\alpha_1(E)}{R}\left[3r^2\frac{d}{dr} + 10r - \frac{5}{3}\langle r^2\rangle\frac{d}{dr} + \epsilon\left(r\frac{d^2}{dr^2} + 4\frac{d}{dr}\right)\right]\rho_0(r),$$

$$\delta\rho_{L\geq 2}(r,E) = -\alpha_l(E)\, r^{l-1}\frac{d}{dr}\rho_0(r),$$

Tassie model

非弾性散乱（運動量表示）

$$T_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{k}_{\alpha'}\right) = \left\langle \chi_{\alpha'}^{(-)}\left(\vec{k}_{\alpha'}, \vec{r}\right) \middle| F_{\alpha'\alpha}^{(\gamma)}(\vec{r}) \middle| \chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{r}\right) \right\rangle$$

$$= \int d^3q\, D(\vec{q})\, \tilde{\rho}_{tr}(\vec{q})\, \tilde{V}_{aN}(\vec{q})$$

相互作用に密度依存がない Folding 模型のフーリエ変換

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = \int d^3r'\, \rho_{tr}(\vec{r}\,')\, V_{aN}\left(\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|\right)$$

$$\tilde{F}_{\alpha'\alpha}(\vec{q}) = \tilde{\rho}_{tr}(\vec{q})\, \tilde{V}_{aN}(\vec{q})$$

→ tρ近似

歪曲波のフーリエ変換

$$D(\vec{q}) = \int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \chi_{\alpha'}^{(-)}{}^{*}\left(\vec{k}_{\alpha'}, \vec{r}\right) \chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha, \vec{r}\right)$$

$$\to \delta^3\left(\vec{k}_\alpha - \vec{k}_{\alpha'} - \vec{q}\right) \quad : \text{Plane wave limit}$$

非弾性散乱（歪曲波の効果）

Eikonal **近似による歪曲波で** D(q) **を評価してみよう**

$$\chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}\right)=\varphi_\alpha\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar v_\alpha}\int_{-\infty}^{z_\alpha}dz_\alpha' U\left(\vec{b}_\alpha,z_\alpha'\right)\right]$$

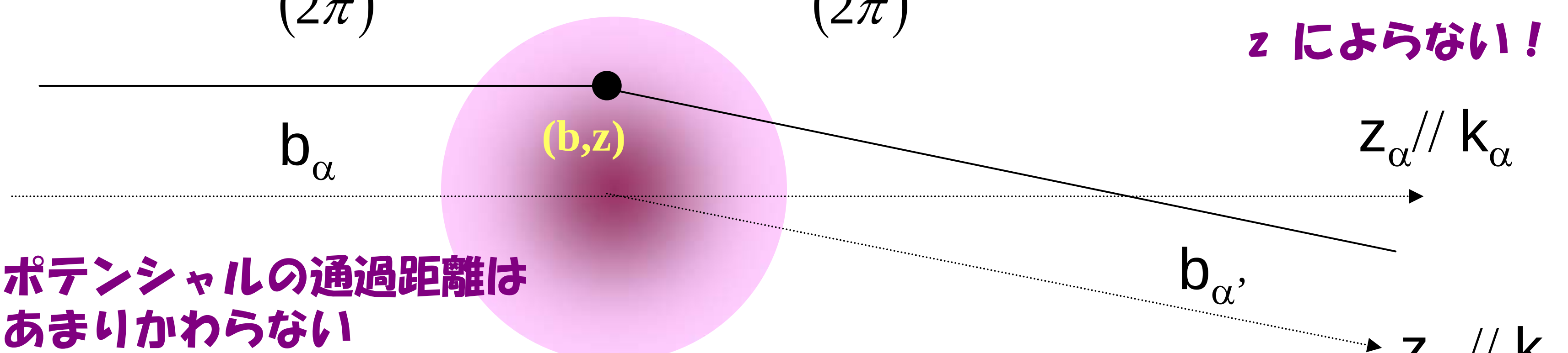
$$\chi_{\alpha'}^{(-)}\left(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r}\right)=\varphi_{\alpha'}\left(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r}\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar v_{\alpha'}}\int_{-\infty}^{z_{\alpha'}}dz_{\alpha'}' U\left(\vec{b}_{\alpha'},z_{\alpha'}'\right)\right]$$

$$\text{if}\quad v_\alpha \approx v_{\alpha'} \quad \& \quad \text{forward scattering}$$

$$\chi_{\alpha'}^{(-)}{}^*\left(\vec{k}_{\alpha'},\vec{r}\right)\chi_\alpha^{(+)}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{r}\right)\approx\frac{\exp\left[i\left(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_{\alpha'}\right)\cdot\vec{r}\right]}{(2\pi)^3}\exp\left[-\frac{i}{\hbar v_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}dz_\alpha' U\left(\vec{b}_\alpha,z_\alpha'\right)\right]$$

$$=\frac{\exp\left[i\left(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_{\alpha'}\right)\cdot\vec{r}\right]}{(2\pi)^3}\Gamma\left(b_\alpha\right)=\frac{\exp\left[i\left(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_{\alpha'}\right)\cdot\vec{r}\right]}{(2\pi)^3}\left[1-\left(1-\Gamma\left(b_\alpha\right)\right)\right]$$

z によらない！



ポテンシャルの通過距離は
あまりかわらない

非弾性散乱（歪曲波の効果）

Eikonal 近似による歪曲波で D(q) を評価してみよう

$$D(\vec{q}) \approx \delta^3\left(\vec{k}_\alpha - \vec{k}_{\alpha'} - \vec{q}\right) - \frac{\delta\left(\left(\vec{k}_\alpha - \vec{k}_{\alpha'} - \vec{q}\right)_{//}\right)}{(2\pi)^2} \int bdb\, J_0\left(\left(\vec{k}_\alpha - \vec{k}_{\alpha'} - \vec{q}\right)_\perp b\right)\left(1 - \Gamma(b)\right)$$

$$= \delta^3\left(\vec{q}_0 - \vec{q}\right) \boxed{- \frac{\delta\left(\left(\vec{q}_0 - \vec{q}\right)_{//}\right)}{(2\pi)^2} \boxed{\int bdb\, J_0\left(\left(\vec{q}_0 - \vec{q}\right)_\perp b\right)\left(1 - \Gamma(b)\right)}}$$

Distortion の効果 (q=q$_0$ にピーク)

〜　k$_{\alpha'}$ を z 軸とした弾性散乱の散乱振幅

非弾性散乱（運動量表示）

$$T_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k}_\alpha,\vec{k}_{\alpha'}\right)=\int d^3q\, D(\vec{q})\,\tilde{\rho}_{tr}(\vec{q})\tilde{V}_{aN}(\vec{q})$$

$$\tilde{V}_{aN}(\vec{q})\approx -\frac{V\lambda^3}{\pi^{3/2}}\exp\left[-(q\lambda)^2\right]\ \ (\lambda:\mathrm{range\ of\ interaction})$$

$$\tilde{\rho}_{tr}(\vec{q})=\tilde{G}_{\ell jm}(q)Y^*_{\ell m}(\hat{q})$$

$$\tilde{\rho}^{\ell=2}_{tr}(\vec{q})\propto Y^*_{\ell m}(\hat{q})\exp\left(-(qa)^2\right)\times$$

W-S density の場合

$$\left[j_2(qR)+4\left(\frac{a}{R}\right)^2 qR\,j_1(qR)+4\left(\frac{a}{R}\right)^4(qR)^2 j_0(qR)\right]$$

$$D(\vec{q})\approx\delta\left((\vec{q}_0-\vec{q})_{//}\right)\times$$

$$\left[\delta^2\left((\vec{q}_0-\vec{q})_\perp\right)-\frac{1}{(2\pi)^2}\int bdb\,J_0\left((\vec{q}_0-\vec{q})_\perp b\right)\left(1-\Gamma(b)\right)\right]$$

非弾性散乱（運動量表示）

相互作用に密度依存がある Folding 模型の場合

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho_{tr}(\vec{r}\,') V_{aN}\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|, \rho_0(\vec{r}\,')\right)$$

通常の密度依存は Factorize されている

$$V_{aN}\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|, \rho_0(\vec{r}\,')\right) = g\left(\rho_0(\vec{r}\,')\right) V^0_{aN}\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)$$

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho_{tr}(\vec{r}\,') g\left(\rho_0(\vec{r}\,')\right) V^0_{aN}\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)$$

$$\equiv \int d^3r' \overline{\rho}_{tr}(\vec{r}\,')\, V^0_{aN}\left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)$$

$$\overline{\rho}_{tr}(\vec{r}\,') = \rho_{tr}(\vec{r}\,') g\left(\rho_0(\vec{r}\,')\right)$$

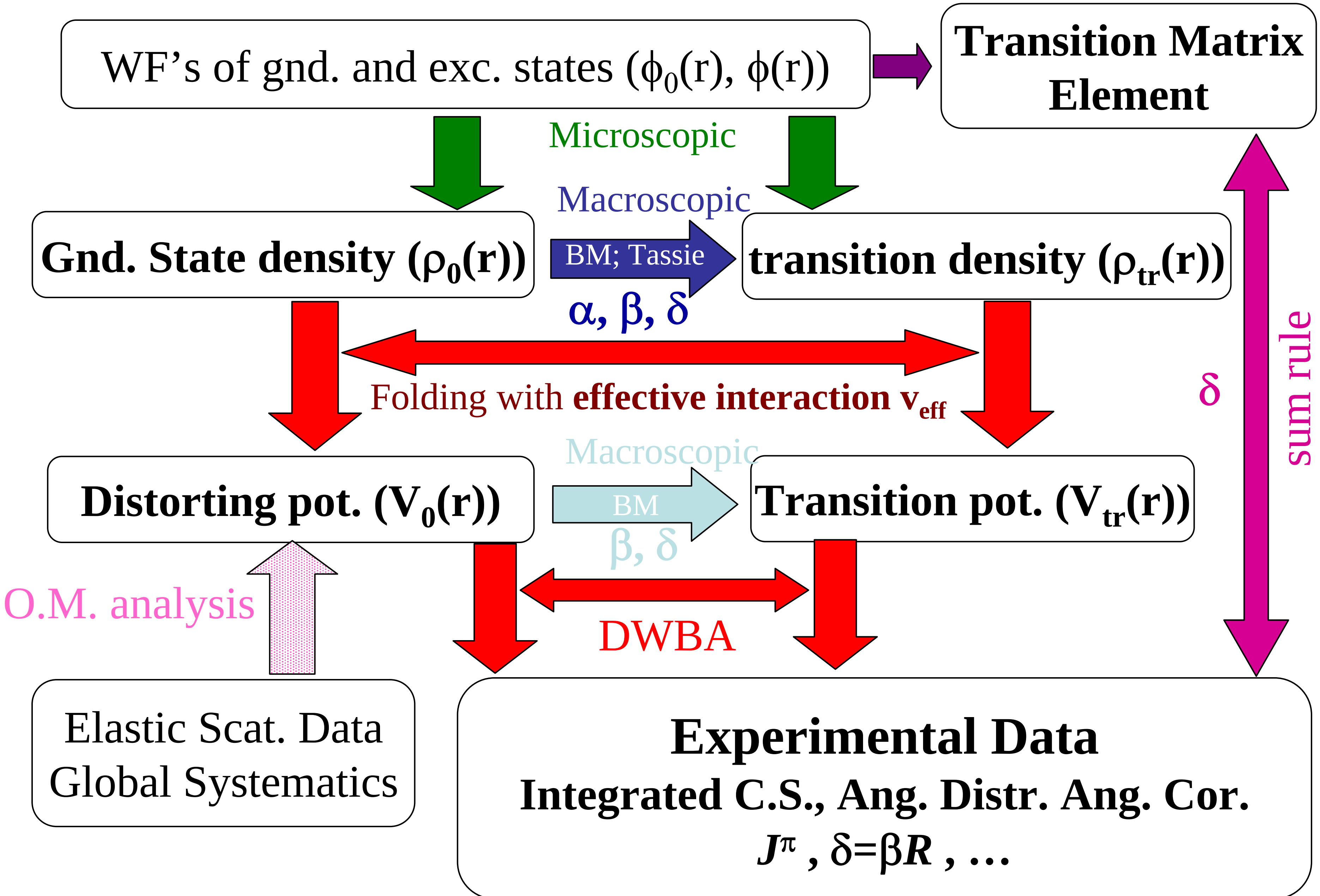
と、密度依存を遷移密度に繰り込めば、(Z. Phys. A225 (1984) 316)

$$\tilde{F}_{\alpha'\alpha}(\vec{q}) = \tilde{\overline{\rho}}_{tr}(\vec{q}) \tilde{V}^0_{aN}(\vec{q})$$

高運動量成分が削られる

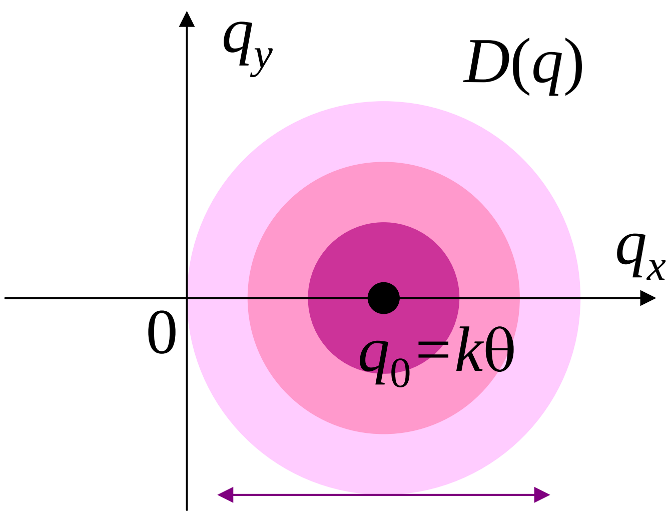
弾性・非弾性散乱から何がわかるか

Analysis of Alpha inelastic excitation

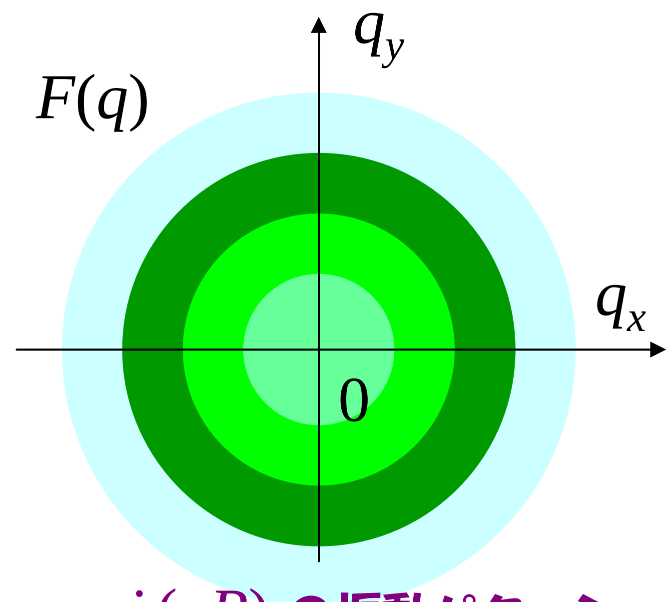


弾性・非弾性散乱から何がわかるか

- 弾性散乱の角度分布～Profile function の2次元 Fourier 変換
  ポテンシャルの大きさ、表面の厚さ、引力の強さ、吸収の強さ。
- 角度分布の形は、移行角運動量（~遷移密度の Fourier 変換）で決まる。(cf. PWBA) 歪曲波の影響



弾性散乱の角度分布の拡がり



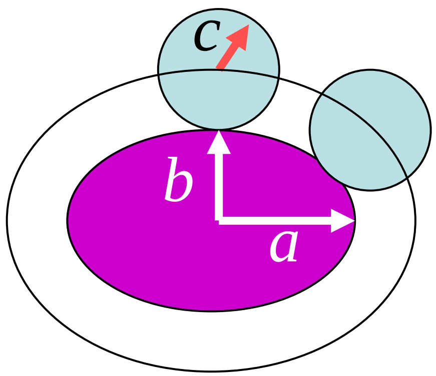
$j_l(qR)$ の振動パターン

非弾性散乱から何がわかるか(変形長)

- 断面積の絶対値は、形状因子の大きさ～遷移密度の大きさで決まる。巨視的模型では、βR（変形長）の大きさ。

$$F_{\alpha'\alpha}(\vec{r}) = (I_A M_A \ell m \mid I_{A^*} M_{A^*}) \frac{\beta_\ell R_0}{\sqrt{2\ell+1}} \left.\frac{dU(r,R)}{dR}\right|_{R=R_0} Y^*_{\ell m}(\Omega)$$

- 半径ｃの球形プローブで、半径ｒ、変形度βの原子核を見たときの見かけの変形度はβ’となるが、変形長は同じ



$$\beta = \text{const.} \times \frac{a-b}{a+b} = \text{const.} \times \frac{a-b}{2R}$$

$$\beta' = \text{const.} \times \frac{a-b}{a+b+2c} = \text{const.} \times \frac{a-b}{2(R+c)}$$

$$\beta R = \beta'(R+c)$$

非弾性散乱から何がわかるか（モーメント）

- (folding 模型のセンスで)ポテンシャルの形状を、プローブの大きさ(相互作用のレンジ)をunfold すれば、原子核の形状にやきなおせる。

$$F(\vec{r}) = \int d^3r' \, g(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}')$$

$$\left[r^n\right]_F \equiv \int d^3r \, r^n \, F(\vec{r}) = \left[r^n\right]_g + \left[r^n\right]_f$$

- Gaussian のようにF, g, f が x, y, z の関数に factorize でき、g が球形であれば、

$$F(\vec{r}) = \int d^3r' \, g(|\vec{r} - \vec{r}'|) f(\vec{r}')$$

$$\left[x^n\right]_F = \left[x^n\right]_g + \left[x^n\right]_f \quad ; \quad \left[y^n\right]_F = \left[y^n\right]_g + \left[y^n\right]_f$$

$$\left[z^n\right]_F = \left[z^n\right]_g + \left[z^n\right]_f$$

$$\left[r^{\ell+n} Y_{\ell m}(\hat{r})\right]_F = \left[r^{\ell+n} Y_{\ell m}(\hat{r})\right]_f$$

c.f. 参考資料（変形調和振動子波動関数）

非弾性散乱から何がわかるか（換算遷移確率）

$$\left[r^{\ell+n}Y_{\ell m}(\hat{r})\right]_F = \left[r^{\ell+n}Y_{\ell m}(\hat{r})\right]_f$$

が成り立てば、換算遷移確率は、ポテンシャルの $r^{l+n}\,Y_{lm}$ 期待値であらわすことができる

$$\left\langle r^2 Y_{20}(\hat{r})\right\rangle_{WS} \approx \frac{3}{4\pi}\beta_2 R_0^2\left[1+\left(\frac{\pi a}{R_0}\right)^2\right]$$

c.f. 参考資料（W-S に関するメモ）

- あるプローブで見たときの換算遷移確率とみなせる
- (注意) 第２項は必ずしも小さくない。通常の原子核では、a~0.65 fm なので、半径が 5 fm だとして、4 % くらい。軽い核で半径が 3 fm だとすると、45 % にも及ぶ。まして、中性子ハロー核のように a が実効的に大きければ、決して無視できる量ではない！

非弾性散乱から何がわかるか（核内陽子・中性子）

- プローブと核内陽子、プローブと核内中性子の相互作用の強さが異なる場合、形状因子を陽子部分と中性子部分にわけて考える

$$F(\vec{r}) = F_p(\vec{r}) + F_n(\vec{r})$$
$$= \int d^3 r_p' V_p(\vec{r} - \vec{r}')\rho_{tr}^p(\vec{r}') + \int d^3 r_n' V_n(\vec{r} - \vec{r}')\rho_{tr}^n(\vec{r}')$$

- 相互作用の形状および遷移強度の形状が同じで、その強度のみが異なる場合は、

$$F(\vec{r}) = (b_p M_p + b_n M_n)\int d^3 r' f(\vec{r} - \vec{r}')\rho_{tr}(\vec{r}')$$

$$\left\langle r^2 Y_{20}(\hat{r}) \right\rangle_{pot} \approx \frac{3}{4\pi}\beta_2 R_0^2 \approx M_{eff} \approx \frac{b_p M_p + b_n M_n}{b_p Z + b_n N}$$

Bernstein’s Prescription

非弾性散乱から何がわかるか（確からしさ）

- いろいろな仮定の正当性をチェック
  - 特に、Exotic な現象を導くとき、用いた仮定は正当か？
  - 核内陽子と核内中性子の違いを導くときに、それらが同じことを前提にした仮定を用いていないか？
- 基本的な量を計算する。
  - 波数(運動量)、移行運動量の大きさ、核およびポテンシャルの半径、平均自由行程 etc.
  - Profile function の計算は Excel でもできる。
  - Fourier 変換はちょっと面倒だけれど…
- 求めたい物理量の精度はどれくらいか？
  - 10-20%の精度で求めるならあまりこだわらなくてもよい
  - それをこえる精度の場合、Consistency 等の様々なチェックが必要
- 計算コードが思った計算結果を出したか(後述)

非弾性散乱から何がわかるか（崩壊の異方性）

- 非弾性散乱の結果、励起された原子核は整列している

$$T^{l}_{\alpha'\alpha}\left(\vec{k},\vec{k}'\right)_{PWBA} \approx \left\langle \Phi_{\alpha'}\left(\vec{k}',\vec{r}\right) \middle| V_l\left(\vec{r}\right) \middle| \Phi_{\alpha}\left(\vec{k},\vec{r}\right) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\, V_T(r) Y^{*}_{l0}(\hat{r}) \exp\left[i\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\cdot\vec{r}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int r^2 dr\; j_l(qr) V_T(r) \boxed{Y_{l0}\left(\hat{q}\right)}$$

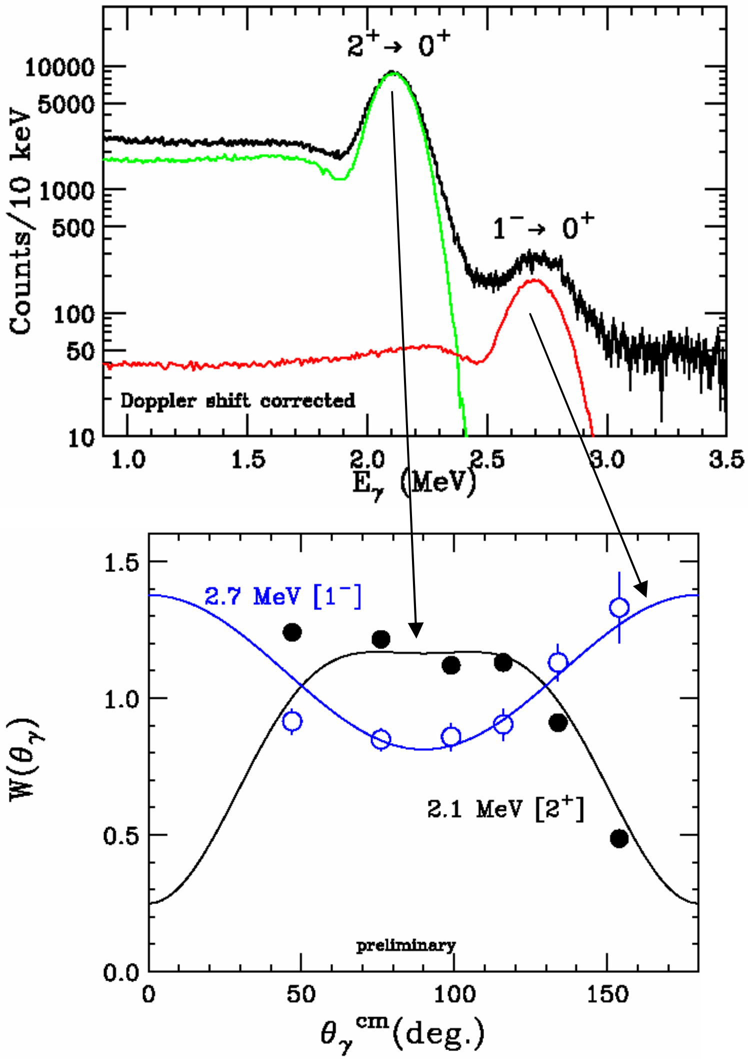
- PWBA ではｚ軸を移行運動量ベクトルの方向にとると、m＝0 の成分だけしかない
- 歪曲波の効果は、これをにじませるが、m=0 の成分が強いという性質は維持されている
- 超前方を除いて、移行運動量ベクトルは、散乱平面内でビーム軸とほぼ垂直なので、散乱粒子の散乱角度を積分しても、残留核の大きな整列が残る

c.f. 参考資料（みようみまねECIS使用法）

$^{4}He(^{12}Be,\ ^{12}Be\ \gamma)$ at 60 A MeV

Angular distribution of γ-decay after (α,α')

- 2.1 & 2.7 MeV States excited by (α, α')
- Alignments of $^{12}Be^{*}$ Anisotropic Angular Distribution of γ
- Consistent with Prediction of DWBA calculation assuming 2^{+} & 1^{-} excitation, resp.
- Confirmation of 1^{-} assignment for 2.7 MeV state



Spectroscopic Factor について

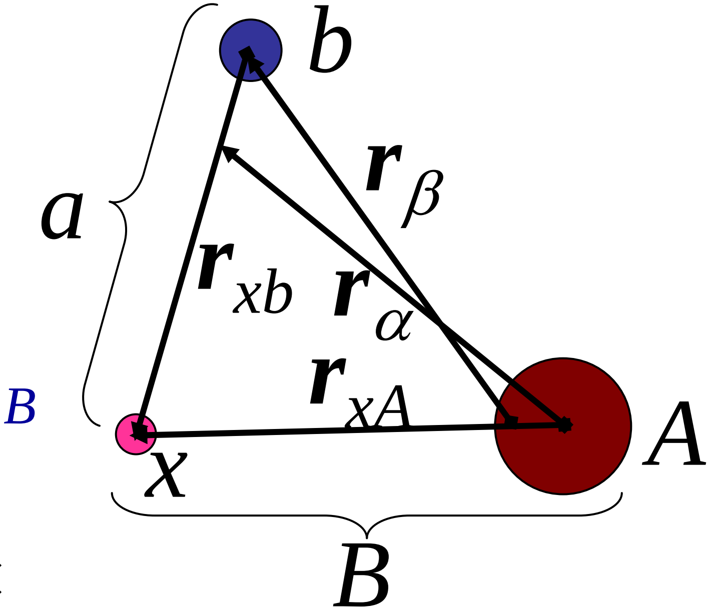
Spectroscopic Factor

$$C^2 S = \left(2I_2 + 1\right)^{-1} \left\langle T_2 T_{2z} I_2 \left\| a^+\left(j\right) \right\| T_1 T_{1z} I_1 \right\rangle^2$$

$$C = \left\langle T_1\, T_{1z}\; 1/2\, m_t \middle| T_2\, T_{2z} \right\rangle$$

- Spectroscopic Factor は、配位空間における overlap で定義されている。
- 核子移行反応では、波動関数の運動量成分が、ある限定された領域に存在する割合が求められる。
- 大きな運動量をもつ領域の場合、短距離相関のため、1核子＋芯を仮定した、local な波動関数がよいとは限らない。
- ノックアウト反応の場合、運動量移行を制御できるので、基底状態における1粒子状態の占有率を求められる可能性がある。ただし、プローブによって、波動関数の座標空間における領域も制限される

$$\vec{k}_{xb} = \frac{b}{a}\vec{k}_{\alpha} - \vec{k}_{\beta}\;;\; \vec{k}_{xA} = \vec{k}_{\alpha} - \frac{A}{B}\vec{k}_{\beta}$$



$$\frac{\hbar^2\kappa_a^2}{2\mu_{xb}} = \varepsilon_a\;;\; \frac{\hbar^2\kappa_B^2}{2\mu_{xA}} = \varepsilon_B$$

Binding energies of a and B

$$\langle \phi_{c'} | V_{xb} | \phi_c \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2}{2\mu_{xb}}\left(k_{xb}^2 + \kappa_a^2\right)\times$$

$$\int d^3r_{xb}\psi_a(\vec{r}_{xb})\mathrm{e}^{i\vec{k}_{xb}\cdot\vec{r}_{xb}} \int d^3r_{xA}\psi_B{}^*(\vec{r}_{xA})\mathrm{e}^{-i\vec{k}_{xA}\cdot\vec{r}_{xA}}$$

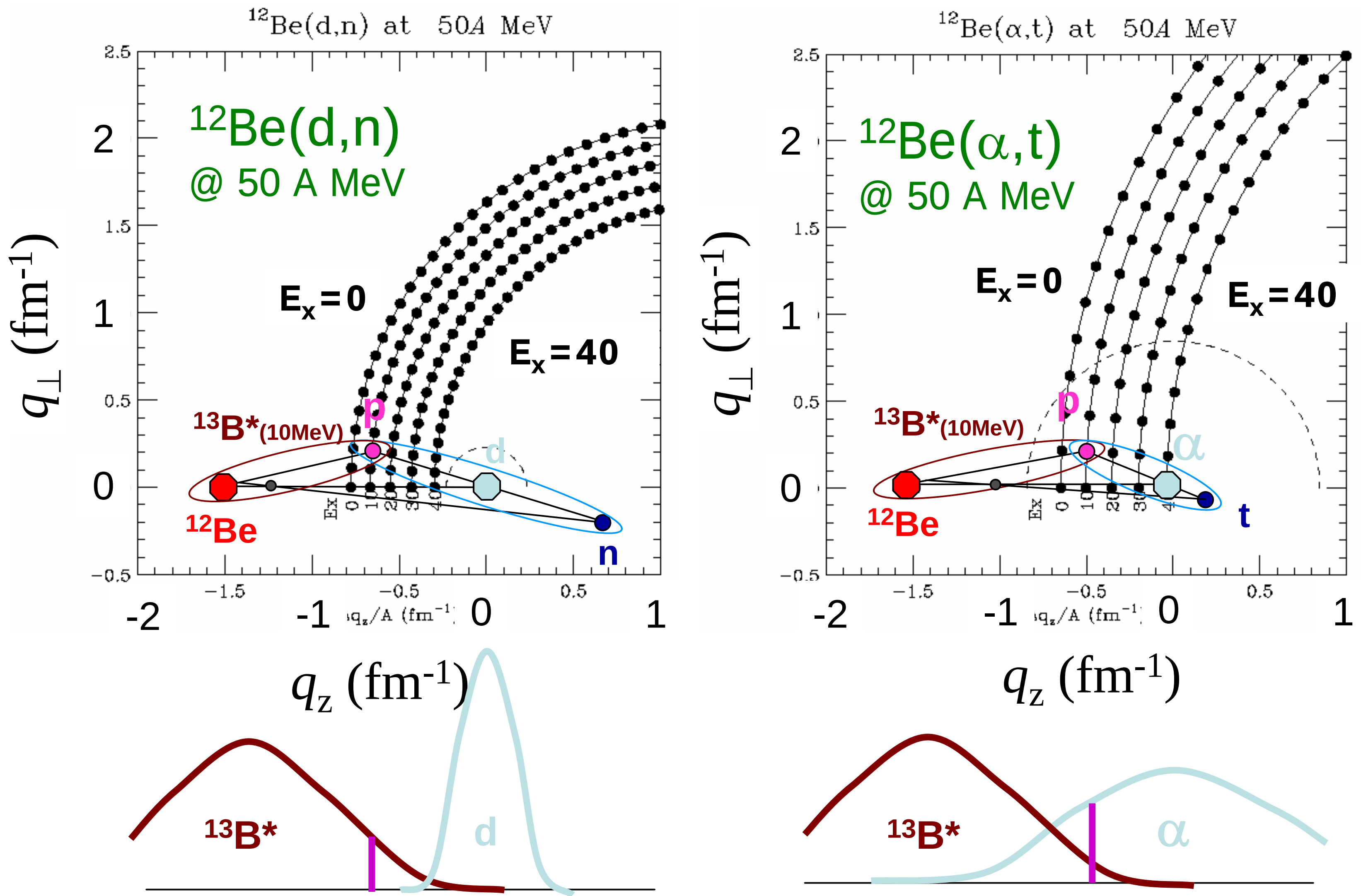
$$\langle \phi_{c'} | V_{xA} | \phi_c \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2}{2\mu_{xA}}\left(k_{xA}^2 + \kappa_B^2\right)\times$$

$$\int d^3r_{xb}\psi_a(\vec{r}_{xb})\mathrm{e}^{i\vec{k}_{xb}\cdot\vec{r}_{xb}} \int d^3r_{xA}\psi_B{}^*(\vec{r}_{xA})\mathrm{e}^{-i\vec{k}_{xA}\cdot\vec{r}_{xA}}$$

Same value but different expressions

Fourier Transforms of wave functions of nucleon (x) in a and B

Proton Transfer in Momentum Space



ストリッピング反応

- 微分断面積は、２つの波動関数のFourier成分の積で書ける
- Fourier成分の運動量は、入射エネルギー、Q値、および散乱角度が決まると一意的に決まる。
- エネルギーが数10MeV以上になると、これらの運動量は、大きくなってしまう(1fm^{-1} 程度かそれ以上)。→運動量ミスマッチ
- 入射粒子 $a=b+x$ が $(0s)^n$ の場合、x の運動量分布は、0 を最大に、ほぼ単調に減少する。
- 残留核 $B=A+x$ の波動関数は、主量子数により node の数が決まるが、有限の運動量の領域では、l によらず、運動量が大きくなるにつれ、ほぼ単調に減少する。角度分布は l によらない。
- 大運動量成分は、短距離相関と関連し、相対距離だけの関数とは限らない。

Spectroscopic Factor

$$C^2S = (2I_2+1)^{-1}\langle T_2 T_{2z} I_2 \| a^+(j) \| T_1 T_{1z} I_1 \rangle^2$$

$$C = \langle T_1\, T_{1z}\; 1/2\, m_t \,|\, T_2\, T_{2z} \rangle$$

- Spectroscopic Factor **は、配位空間における** overlap **で定義されている。**
  - **始状態** / **終状態が、芯＋1** or **2粒子であるとは限らない。**
    - **特に** Pauli blocking

(例)中性子ハローの軌道

$$\left|{}^{12}\mathrm{Be}\right\rangle = \left|{}^{4}\mathrm{He-core}\right\rangle \otimes \left[\alpha\left|\pi(p)^2\nu(p)^6\right\rangle + \beta\left|\pi(p)^2\nu(p)^4\nu(sd)^2\right\rangle\right]$$

$$\left|{}^{14}\mathrm{Be}\right\rangle = \left|{}^{4}\mathrm{He-core}\right\rangle \otimes \left[\left|\pi(p)^2\nu(p)^6\nu(sd)^2\right\rangle\right]$$

なら、

$$\left|{}^{14}\mathrm{Be}\right\rangle \neq \left|{}^{12}\mathrm{Be}\right\rangle \otimes \left[\alpha'\left|\nu(p)^2\right\rangle + \beta'\left|\nu(sd)^2\right\rangle\right]$$

である。^{14}Be **中には、**^{12}Be**の基底状態以外の成分がある**

殻模型計算などで、始状態と終状態の配位とその overlap **を計算する**

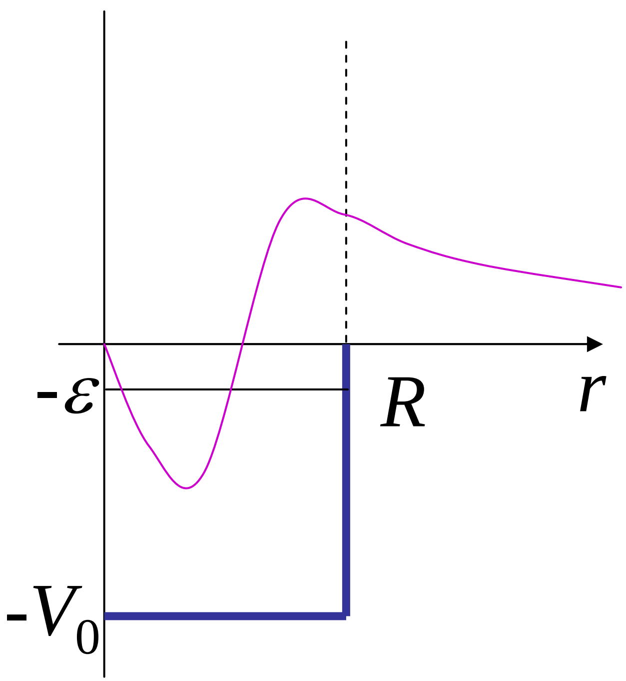
ことが必要！小さな配位成分が coherent **に効く場合がある(集団性)**

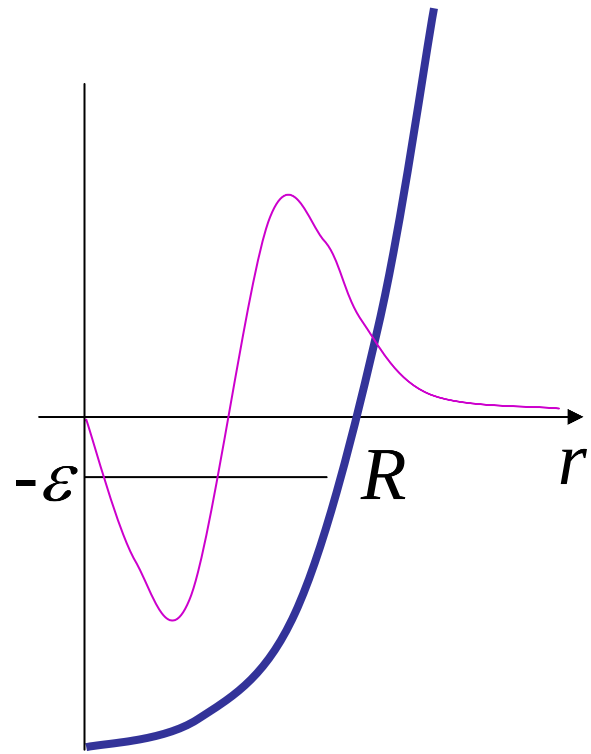
Spectroscopic Factor と ANC (asymptotic normalization constant)

- 反応では、座標空間および運動量空間のある領域の１粒子波動関数の大きさが求まる。
  - 低エネルギー核子移行反応や重イオンを用いたノックアウト反応では、運動量が小さく、外側の領域の波動関数をみる(ANC)。
  - 電子や高エネルギー核子によるノックアウト反応では、核の領域にわたる座標空間領域で、運動量の関数として波動関数を見る。(Spectroscopic Factor)
  - 中間エネルギー核子移行反応では、波動関数のうち、比較的大きな運動量成分をみる。
- 何らかの理論モデルと比較する場合、これらの特徴にあった理論モデルを用いる必要がある
  - HO殻模型計算は、Spectroscopic Factor を出せるが、ANCは出せない。

Spectroscopic Factor、ANCと一粒子波動関数

Finite well と HO では、波動関数の振幅の核内/核外比が違う。
とくに loosely bound system で顕著

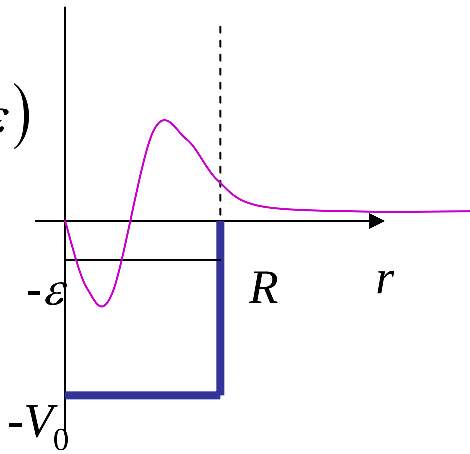




波動関数の内と外　１粒子波動関数の運動量表示

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r)\right]\Psi(\vec{r})=-\varepsilon\,\Psi(\vec{r})$$

$$\frac{\hbar^2 k_{in}^2}{2\mu}=\left(V_0-\varepsilon\right)$$



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+\varepsilon\right]\Psi(\vec{r})=-V(r)\Psi(\vec{r})$$

$$\left(k^2+\kappa^2\right)\Phi(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(-\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\int d^3r\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}V(r)\Psi(\vec{r})$$

$$\Phi(\vec{k})=\frac{1}{k^2+\kappa^2}\,f(\vec{k})$$

$$f(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\mu}{\hbar^2}\int d^3r\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}V(r)\Psi(\vec{r})$$

$$=C\left(k_{in}^2+\kappa^2\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^R r^2dr\;j_\ell(kr)\,j_\ell(k_{in}r)Y_{\ell m}(\hat{k})$$

$$=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k_{in}^2+\kappa^2}{k^2-k_{in}^2}R\left[kR\;j_{\ell+1}(kR)\,j_\ell(k_{in}R)-k_{in}R\;j_\ell(kR)\,j_{\ell+1}(k_{in}R)\right]Y_{\ell m}(\hat{k})$$

$$\Phi(\vec{k})=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k_{in}^2+\kappa^2}{k^2+\kappa^2}\frac{kR^2\;j_{\ell+1}(kR)\,j_\ell(k_{in}R)-k_{in}R^2\;j_\ell(kR)\,j_{\ell+1}(k_{in}R)}{k^2-k_{in}^2}Y_{\ell m}(\hat{k})$$

DWBAコードを使うときの注意

DWBAコードを使うときの注意

- ポテンシャル
  - Folding model にするか、Global potential にするか
  - 大きさや深さ、表面の厚さはもっともらしいか？
- 形状因子
  - 振動モデル、回転モデル、微視的モデルのどれを用いるか
  - 核構造のどういう量を出そうとしているか？
- 求める observable
  - 微分断面積、偏極、整列…

- 手計算、電卓などで、基本的な物理量を計算
  - 入射エネルギーと波数、速度、角度と移行運動量、入射角運動量
  - 核半径とポテンシャル半径
  - ポテンシャルや遷移密度の図くらいノートにはっておこう
- よく使っている人から入力データの例をもらい、マニュアルとつきあわせよう。
  - そのときに、上記の基本的物理量がどれくらい違うかも確認しよう

DWBAコードを使うときの注意

- 計算コードに入力するパラメータ
  - 積分ステップと積分範囲
    - 積分ステップは、入射波数の逆数および表面の厚さより小さく
      - 重イオンの場合相当小さくしないといけない
    - 積分範囲(matching radius)は相互作用がなくなるところまで
      - クーロン励起のときは、範囲を変えて結果の安定性をチェック
      - ファイルから形状因子を読み込むときは、積分範囲まで定義する必要がある
  - 計算する角運動量の範囲
    - Matching radius × 入射波数
  - 励起モデルの指定とそれに必要なパラメータ
    - 変形度か変形長か？
    - 核力励起だけか、クーロン励起も含めるか
  - 出力内容の指定
    - 計算すべき Observable
    - 計算途中、ポテンシャル、形状因子は１度は出力してチェック
    - S行列もたまには出力してみよう

DWBAコードを使うときの注意

- 出力内容のチェック
  - 基本的物理量は、思ったようになっているか
  - Worning がでていないか
  - 指定した励起モデルになっているか
  - 入力パラメータを変化させて、そのふるまいを見ておこう
  - 可能なら、他の計算コードで同じ結果がでるかチェック
  - 可能なら、他の計算モデルで同様の結果がでるかチェック
    - 特に、クーロン励起の場合、Virtual Photon Theory とのクロスチェックが役立つ

DWBAコードの使用例

$E_{cm} = 1148\ \mathrm{MeV}$

$k = 26.8\ \mathrm{fm}^{-1}$

$\eta = 11.$

$R = 8.9\ \mathrm{fm}$

$a = 0.8\ \mathrm{fm}$

$V = 0{,}50\ \mathrm{MeV}$

$W = 0{,}57.9\ \mathrm{MeV}$

$\Delta R = 0.0186\ \mathrm{fm}^{-1}$

$R_{match} = 200$

$= 400$

$= 800\ \mathrm{fm}$

$\ell_{\max} = 5450$

$= 10900$

$= 21800$