

Langevin 方程式について

[P. Langevin, C. R. Acad. Sci. Paris 146 (1908) 530]

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\gamma \cdot v + R(t), \quad \langle R(t)R(t') \rangle = 2 \cdot \gamma \cdot kT$$

摩擦と揺動力は 所謂 散逸揺動定理を満たすことを仮定する。

揺動力Rは ガウス分布を仮定し、時間相関も無いものとする。

ブラウン粒子の運動エネルギーの平均値は、十分時間を経ると初期値に無関係に、熱平衡値 即ち $1/2 \cdot k \cdot T$ になる。 時間相関を持つ一般化

Langevin方程式は、森肇先生によって、射影演算子とラプラス変換を用いて導かれた。 [H. Mori, PTP 33 (1965) 423]

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\int_0^t \gamma(t-t') \cdot v(t') dt' + R(t), \quad \langle R(t)R(t') \rangle = k \cdot T \cdot \gamma(t-t')$$

Fokker-Planck方程式について

- Langevin 方程式からの導出
- 速さ v の空間での分布関数 $f(v, t)$ に対する方程式は、確率の保存の式（流体力学の連続の方程式、即ち物質保存の式に対応）から出発して、導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = -\frac{\partial}{\partial v} (\dot{v} f(v, t)), \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m} \cdot v + \frac{1}{m} \cdot R(t)$$

[Langevin equation]

スムーズな分布関数に対する方程式にするため、時間に関するコース
グレイニング及び R に付いての平均を行う。

[久保 他、統計物理学、岩波 書店]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = \{ \Omega(v, t) \cdot f(v, t) \}, \quad \Omega(v, t) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\beta \cdot v - \frac{1}{m} \cdot R \right),$$

$$\int_t^{t+\Delta t} dt_1 \Rightarrow$$

$$f(t + \Delta t) - f(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \Omega(v, t_1) \cdot f(v, t_1),$$

$$f(t + \Delta t) = \left[1 + \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \Omega(v, t_1) + \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 \Omega(v, t_1) \cdot \Omega(v, t_2) + \Lambda \Lambda \right] \cdot f(v, t),$$

R (t) について平均をとり、その後 もう一度 Δt で除して、零への極限をとると、

$$\frac{\partial}{\partial v} f(v, t) = \frac{\partial}{\partial v} \left[\beta \cdot v + \frac{\beta}{m} \cdot T \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right] f(v, t)$$

[Fokker – Planck equation]

Kramers 方程式について

保存力のある場合のランジュバン方程式は

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m} \cdot p ,$$
$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial q} - \beta \cdot p + R (t)$$

これに等価な 位相空間での分布関数 $f (p, q, t)$ に対する方程式は、以下の 2次元空間での確率保存の式から出発して、同様の操作を行って、

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p, q, t) = - \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q} f(p, q, t)) - \frac{\partial}{\partial p} (\dot{p} f(p, q, t)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p, q, t) = \left\{ - \frac{\partial}{\partial q} \frac{p}{m} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} (\beta \cdot p + m \cdot \beta \cdot T \frac{\partial}{\partial p}) \right\} f(p, q, t)$$

[Kramers equation]

Smoluchowski 方程式について

摩擦力が非常に強い場合、即ち雨滴が終速度に早く到達する場合に対応する場合（平均的には正しいが、個々の軌道については正しいとは限らないが）を考えて、

$$\frac{dp}{dt} \cong 0, \text{ i. e., } \frac{dq}{dt} \cong -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{1}{\gamma} \cdot R(t),$$

[overdamped Langevin equation]

同様に、これに対応する分布関数に対する方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q, t) = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} + T \cdot \frac{\partial}{\partial q} \right\} f(q, t)$$

[Smoluchowski equation]

if $U = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q, t) = \frac{T}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^2} f(q, t), \text{ diffusion coefficient } D = \frac{T}{\gamma}$$

重イオン核融合 I (lighter systems)

- ・ アルファ粒子を含め、複合粒子と原子核の相互作用は強く、強吸収であることは良く知られている。 低エネルギーでは、直接反応は非常に小さく反応断面積は複合核形成、即ち融合反応断面積にほぼ等しい。
- ・ 重イオン反応では、エネルギーに比べ、比較的大きな角運動量を持ち込むことが出来る。 時には、複合核が対応する励起エネルギーでは存在しない、即ち大きな遠心力ポテンシャルのため、ポケット、従って分裂障壁が存在しないことが起きる。速分裂、或いは融合断面積の飽和に関連する。

$$\sigma_{fusion}(E) \cong \sigma_{reaction}(E)$$

$$\cong \pi \cdot \Delta^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot T_l(E)$$

inverted parabolic barrier

$$T_{l=0}(E) \cong 1 / 1 + \exp\{ 2\pi(V_B - E) / \eta\omega \}$$

$$\eta\omega = \eta \left[\frac{d^2V}{dR^2} \Big|_{R_B} / \mu \right]^{1/2}, V_B = V(R_B),$$

重イオン核融合 II (heavier systems)

- ・ 複合核反応でもなく、 直接反応でもない新しい反応機構 深部非弾性衝突 (DIC ; Deep Inelastic Collisions) が、超重元素合成を目指す実験で、融合反応に制限を与えるものとして発見された。
1. 入射エネルギーの大きな損失 (融合一分裂反応 ?)
 2. 角度分布が、エネルギー損失と相関している
 3. 質量の交換は、角度に依存するが、比較的小さい (直接反応 ?)

[J. Wilczynski, PL 47B(1973) 484]

[B. Tamain et al., NP A252(1975) 187]

Wilczynski Plot

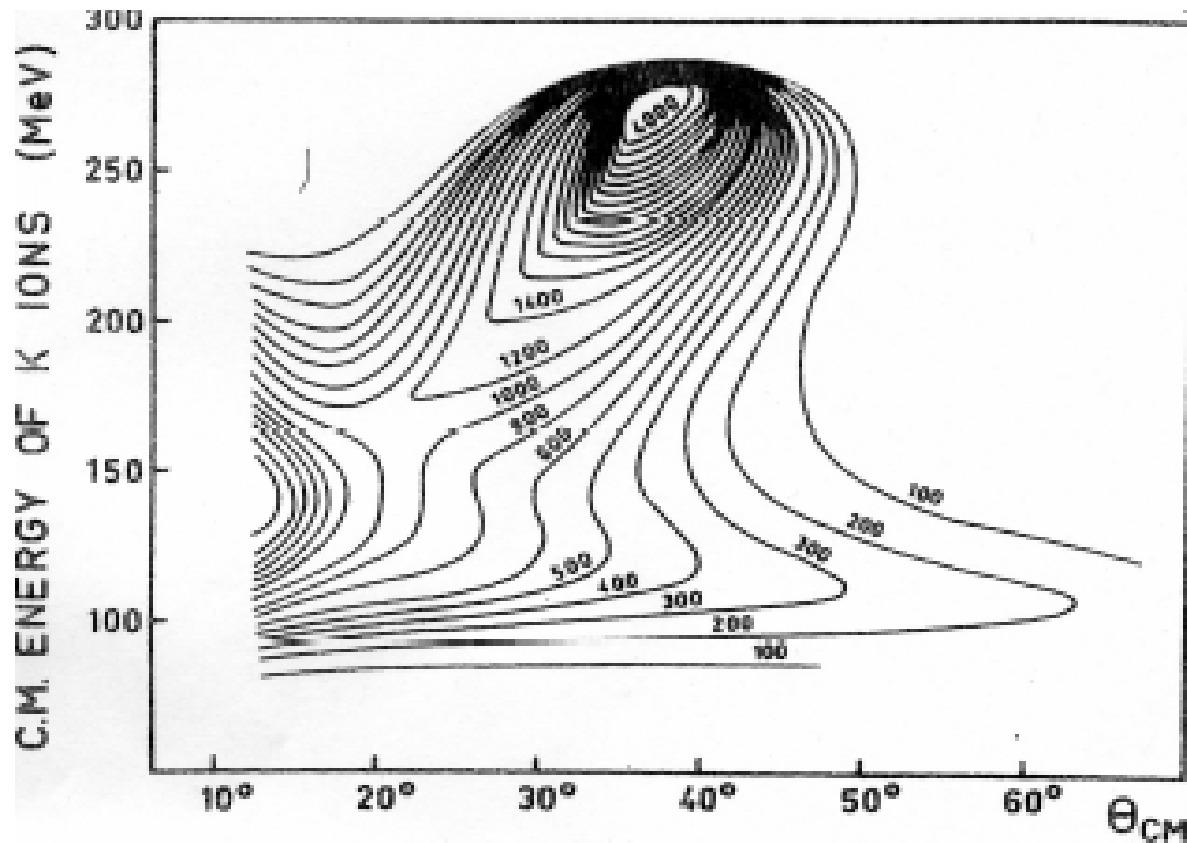


Fig. 1. Contour map of the differential cross section $(d^2\sigma/dE \cdot d\theta)_{CM}$ (in $\mu\text{b}/\text{MeV} \cdot \text{rad}$) in the reaction $^{232}\text{Th}(^{40}\text{Ar}, \text{K})$ at $E_{\text{lab}} = 388 \text{ MeV}$, as a function of the scattering angle θ_{CM} and the C.M. energy of the detected K ions.

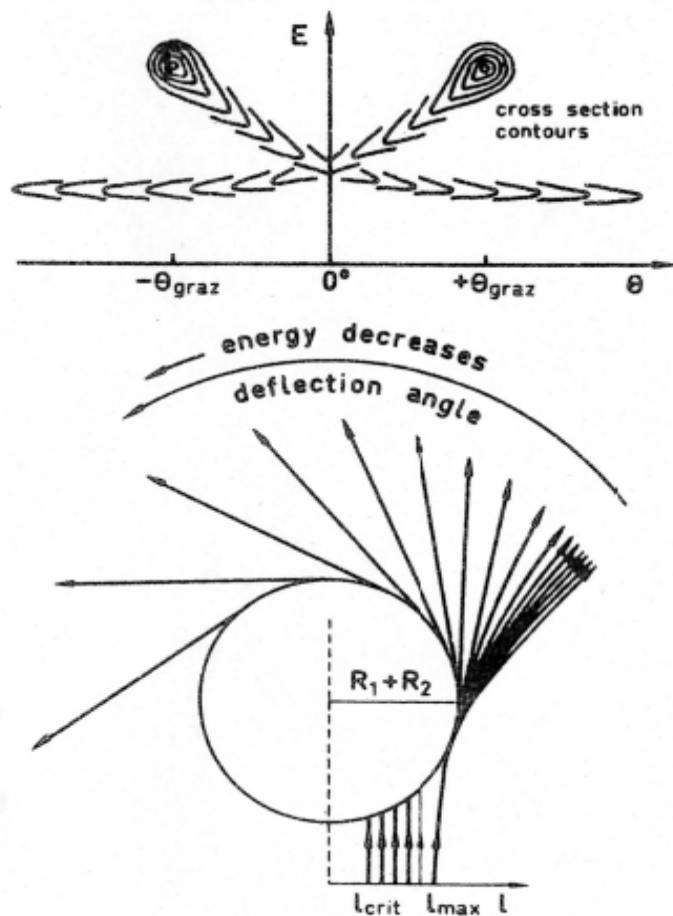


Fig. 2. Pictorial description of the proposed model for transfer reactions at high angular momenta (see text).

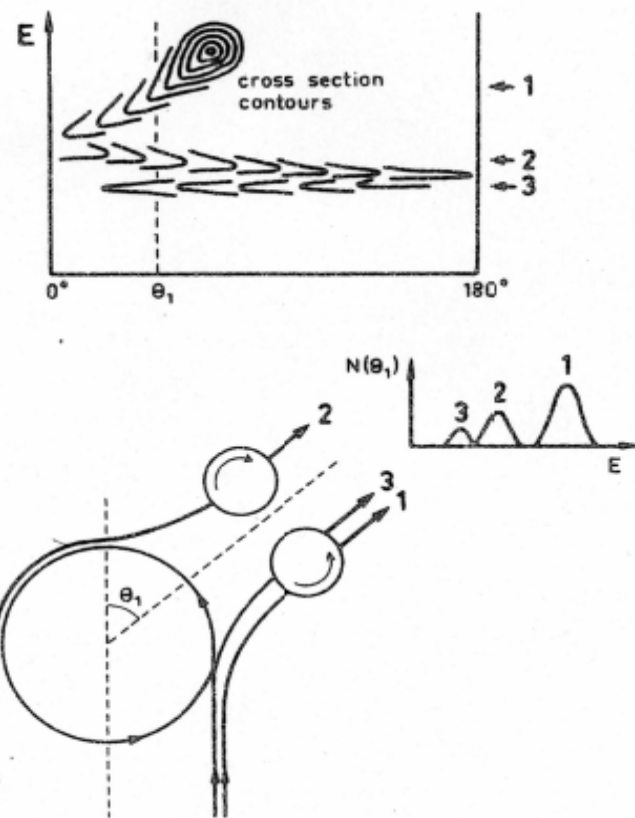
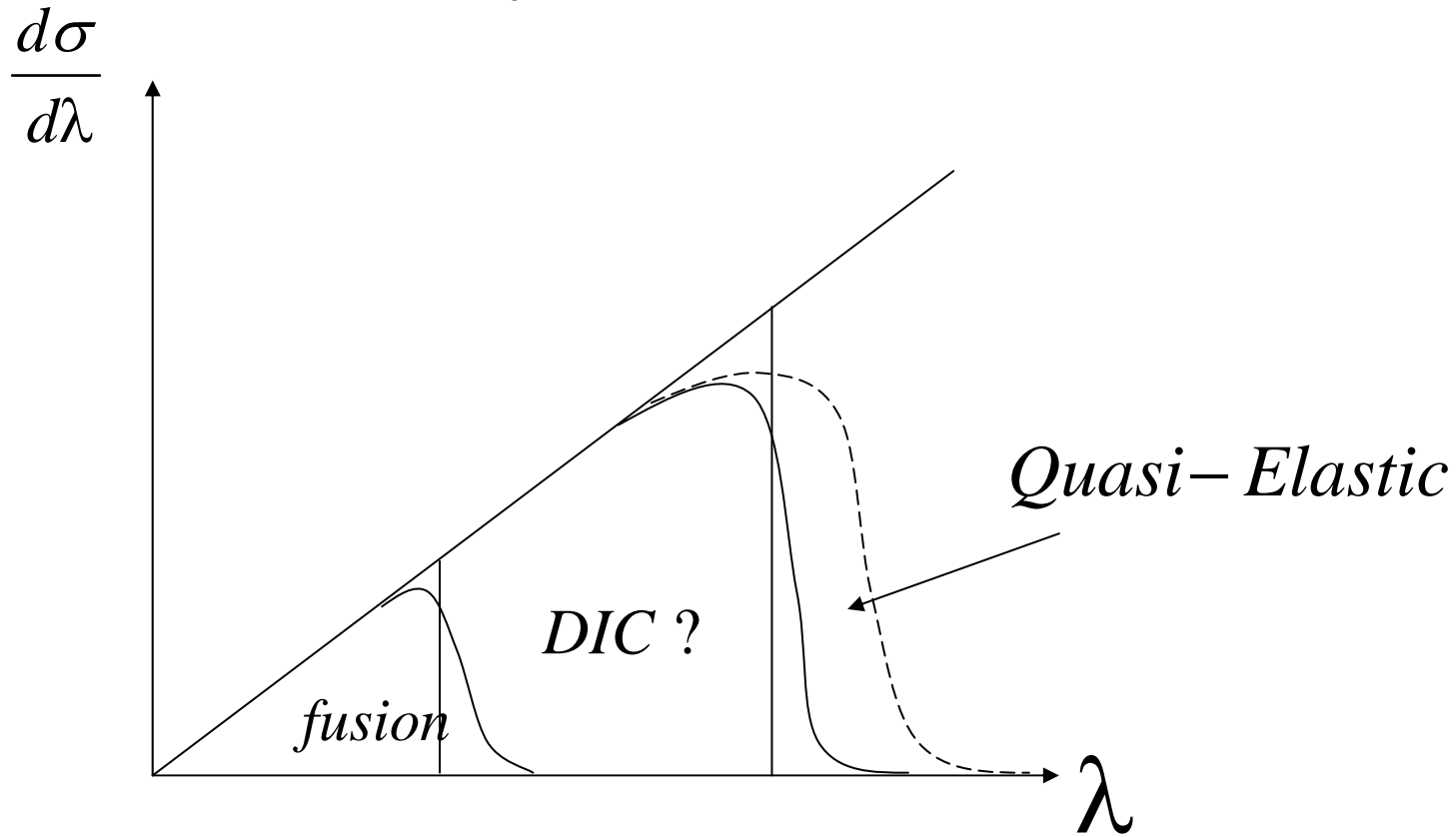


Fig. 3. Illustration of possible experiments which could prove the idea on nuclear orbiting in heavy-ion reactions (see text).

Heavier Systems



Fusion = Fusion - Fission + Evaporatio n - Residue

古典軌道模型

融合反応励起関数の飽和、及びDICを説明するために、摩擦を伴う散乱過程を記述する古典軌道模型提案された。

[J. P. Bondorf et al., Phys. Rept. 15(1974)83]

[C. F. Tsang, Physica Scripta 10A(1974)90]

[Gross-Kalinowski, Phys. Rept. 45(1978)175]

[J. R. Birkelund et al., Phys. Rept. 56(1979)107]

この模型は、さらに重い系における融合阻害といわれる、融合確率が極端に小さく、入射エネルギーが大きくなっても中々増加しない現象にも、適応され、一定程度の成功が得られている。その後、エネルギー散逸に伴う揺動が付け加えられた。

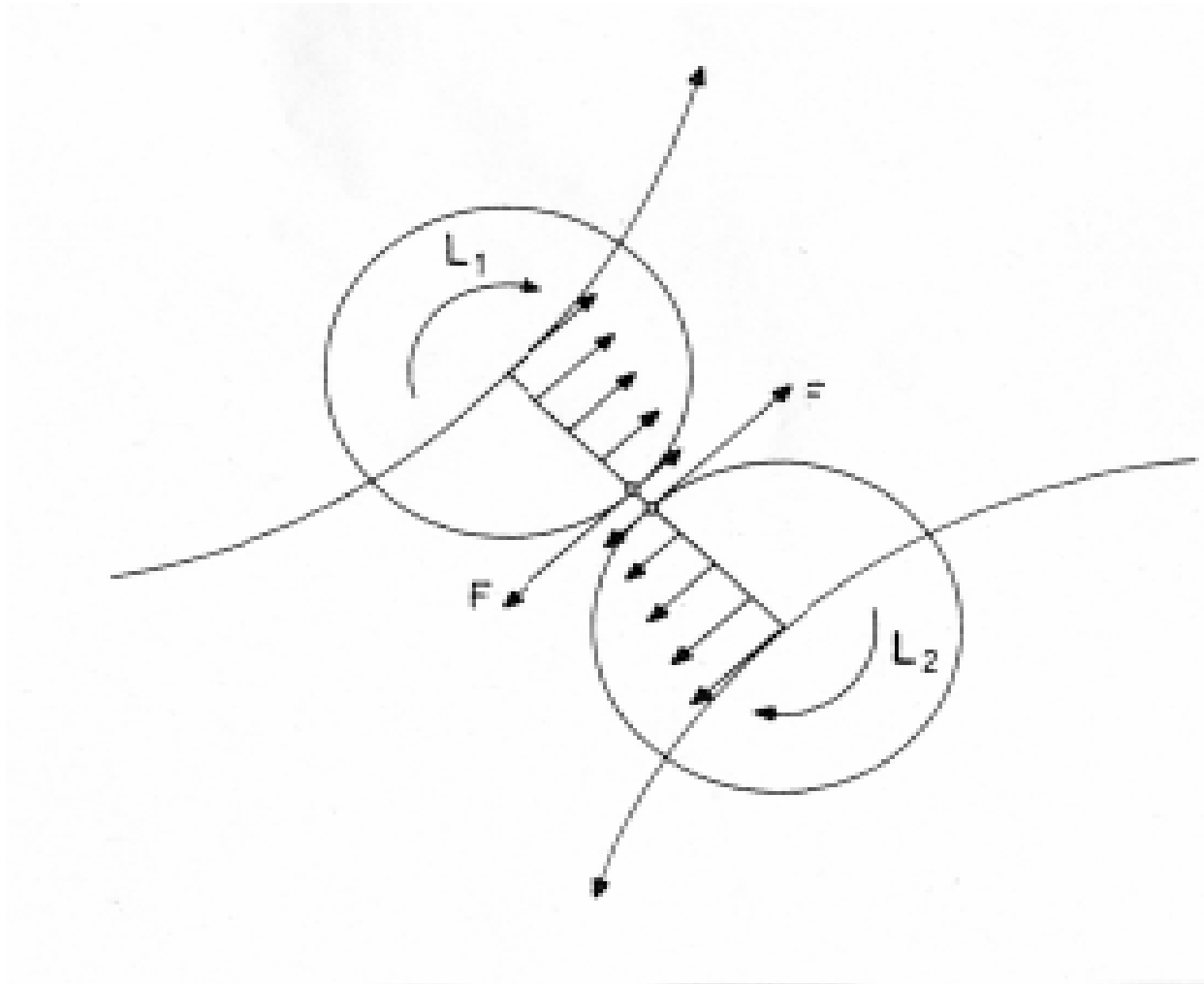
[P. Froebrich, NP A545(1992)87c]

ただし、この論文を含め、彼の論文では、全て 角運動量の揺動力の強さ、次元に誤りがある。 融合阻害の説明のために、LDM ポテンシャル上で、強い摩擦力の下での古典軌道を求め、実験データから得られるExtra-Push エネルギーなどを説明することに成功したが、散逸に伴う揺動は無視されていた。 この揺動は、古典軌道では記述できない、小さな融合確率の記述には、必要 であり、超重元素融合反応の記述には、必要不可欠である。

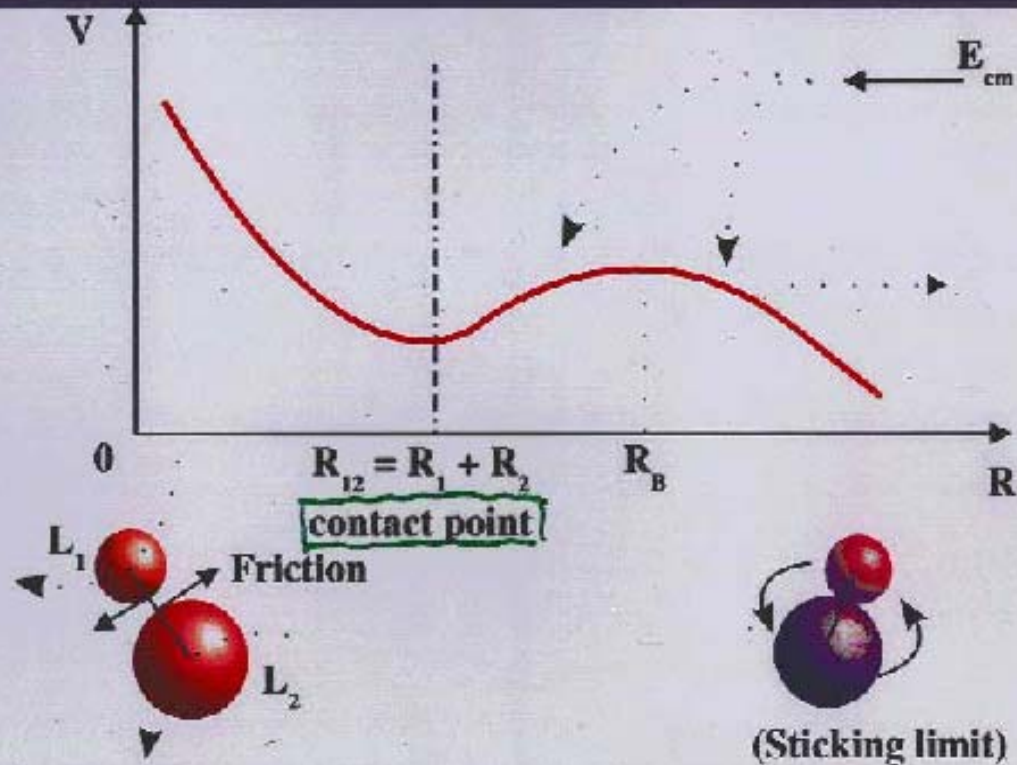
[W. J. Swiatecki, Phy. Scripta 24(1981)113]

[J. P. Blocki et al., NP A459(1986)145]

Inclusion of "Rolling Friction" in addition to "Sliding Friction"



Surface friction model

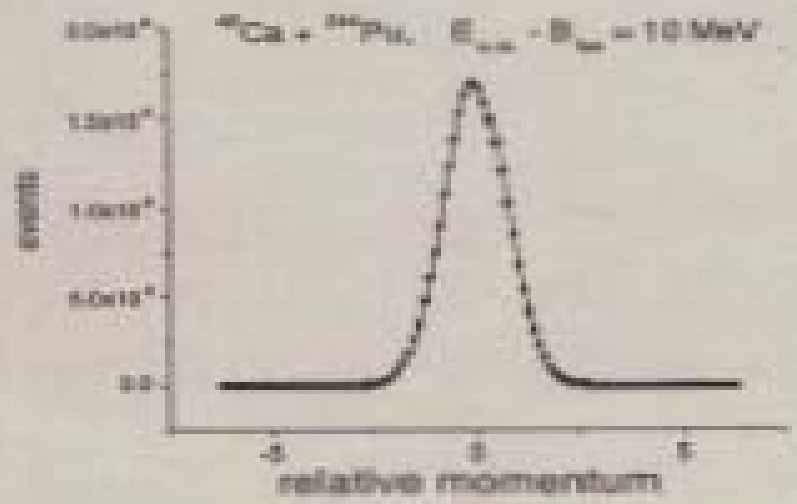
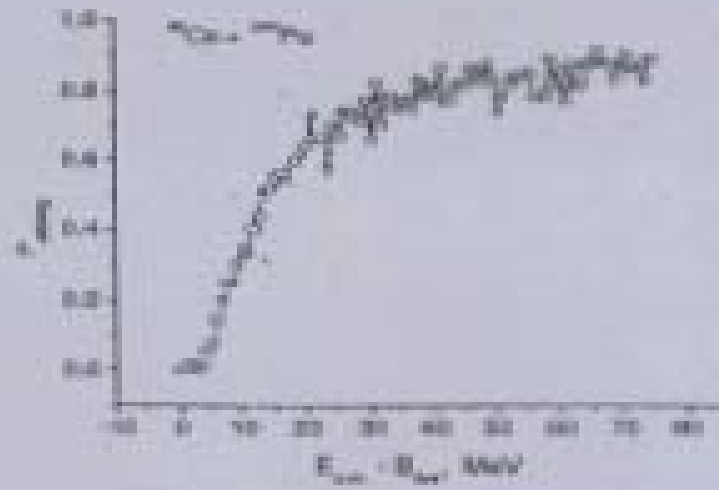


$$\begin{cases} \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\hbar^2 L^2}{2\mu r^2} - C_r(r) \frac{dr}{dt} + R_r(t) \\ \frac{dL}{dt} = -\frac{C_r(r)}{\mu} [L - \frac{5}{7} L_0] + R_T(t) \end{cases}$$

$$V = V_N + V_C$$

$$\langle R_i(t) R_j(t') \rangle = 2 \delta_{ij} \delta(t-t') C_r T^{1/2}(t) \quad C_r C_T \approx \left(\frac{\partial V_N}{\partial r} \right)^2 : \text{Gross-Kalinowski}$$

G. Kosenko et al., Proc. ASR
2001, J. Nucl. Radiochem. Sci. 3
(2001) 19.



$\bar{l} \approx 0, \bar{k} \approx 0$

核融合阻害

融合が大きく阻害される原因は、重い系ではクーロン障壁を越えて入射系が結合し、複合系が必ずしも球形の複合核を形成しないことにある。それは、洋ナシ型の結合系が LDM ポテンシャル上で条件付き鞍点、或いは稜線の外側にあることによる。軽い系では常に内側にあるのでクーロン障壁を越えて結合さえすれば、融合するが、重い系では更にもう一つの“障壁”を越えなければ、球形複合核には到達できない。

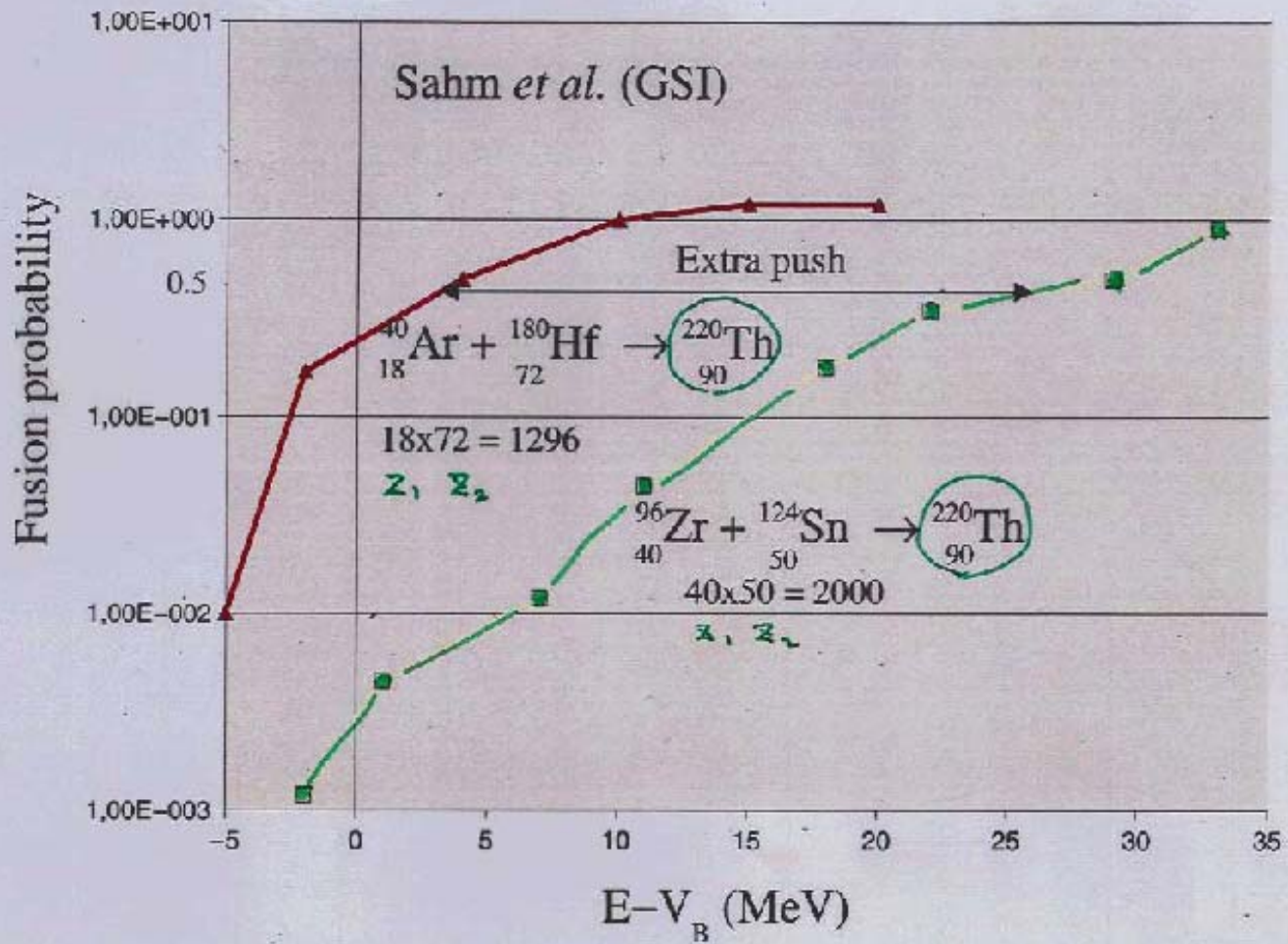
結合時、即ちクーロン障壁通過時に、或いは結合僅か後には、集団運動エネルギーは、完全に散逸していると推測される。従って、融合確率を求めるには、LDM 上の動力学を解くことが必須となる。

[Y. Abe, Eur. Phys. J. A13(2002)143, Proc. of RB2000]

阻害の機構を理解するために、多次元LDM ポテンシャルを双一次関数で与えられるとし、質量、及び摩擦テンソルを座標（形を記述するパラメータ）に依らない定数であると近似する、単純化したモデルで解析解を求めると、Extra-pushなどを定性的に説明できる。

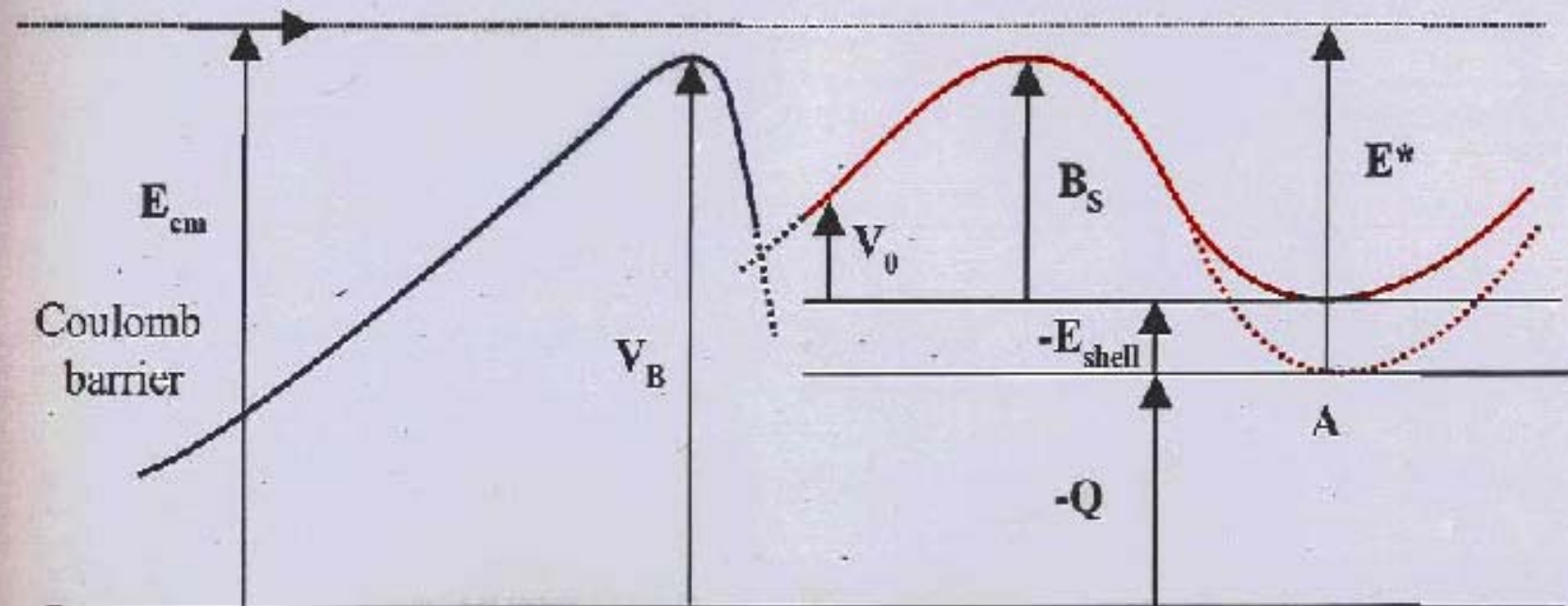
[Y. Abe et al., PR E61(2000)1125]

[Y. Abe et al., PTP Suppl. 146(2002)104]



Energetic scheme of the fusion process

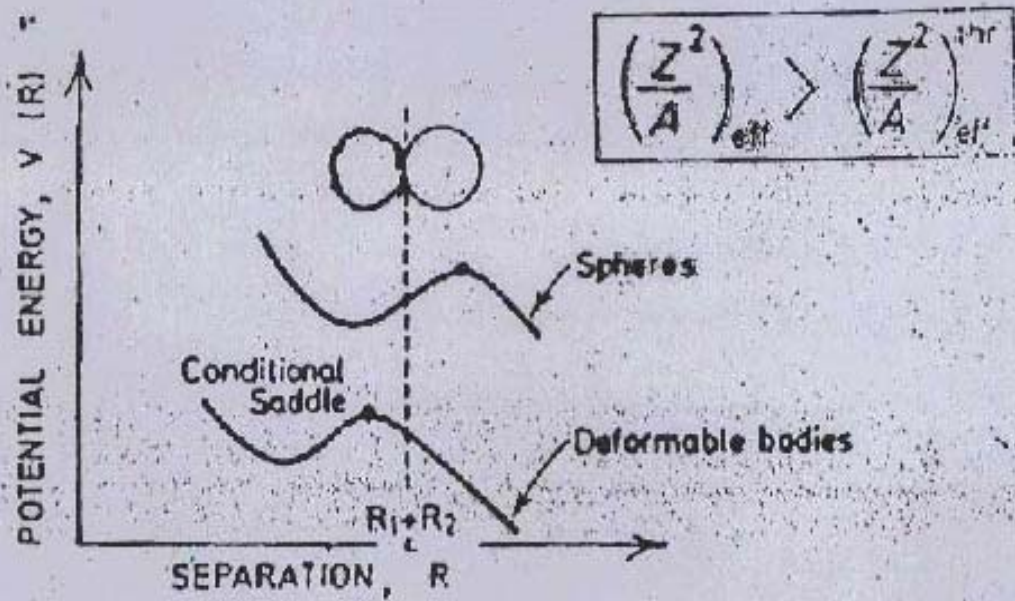
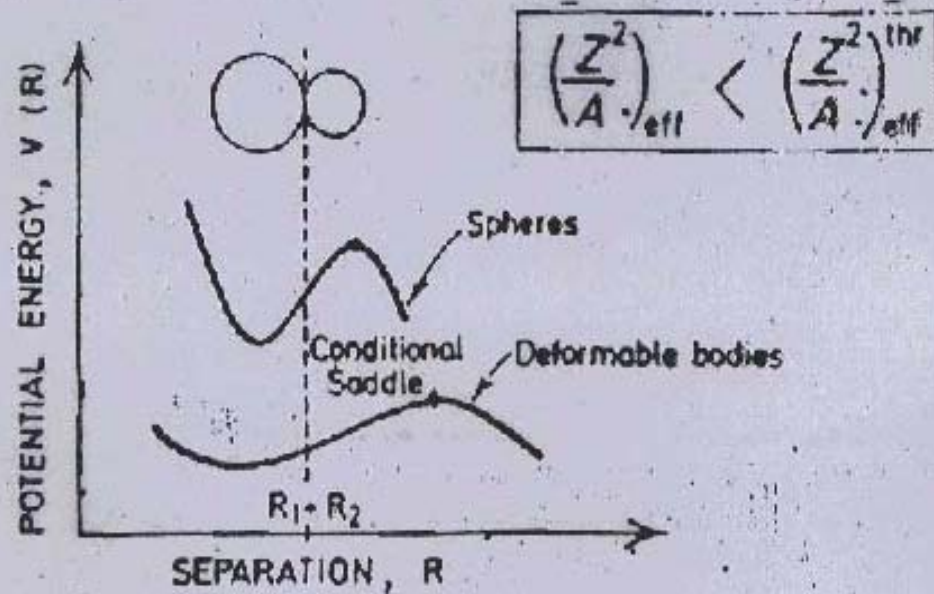
$$P_{\text{stick}}^J(E_{\text{cm}}) \times P_{\text{form}}^J(E_{\text{cm}}) = P_{\text{fusion}}^J(E_{\text{cm}})$$

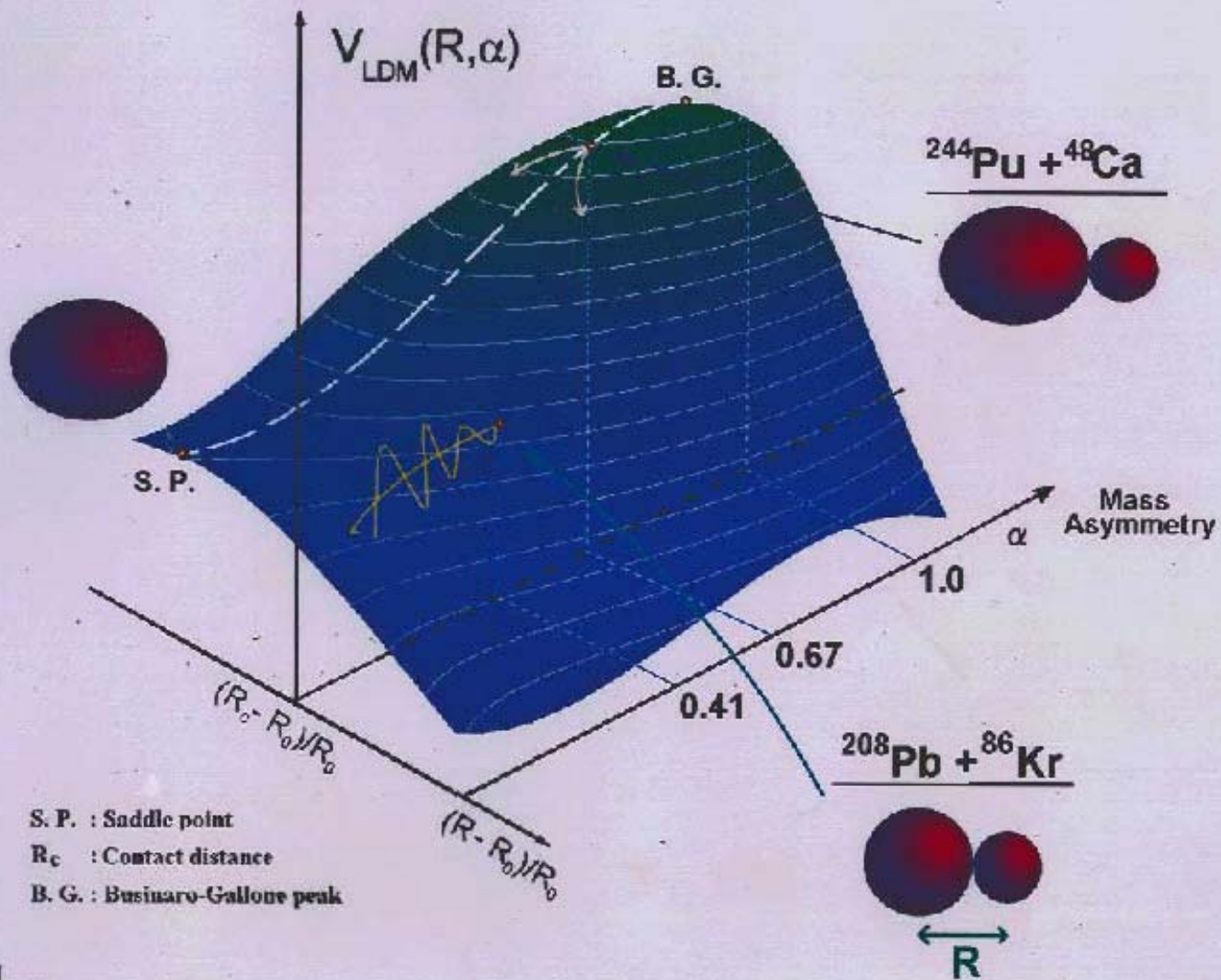


$A_1 + A_2$

$$E^* = E_{\text{cm}} + Q$$

$$= V_0 - E_{\text{shell}} + \varepsilon_0 + k_0$$





S. P. : Saddle point
 R_c : Contact distance
 B. G. : Businaro-Gallone peak

C. W. Shen

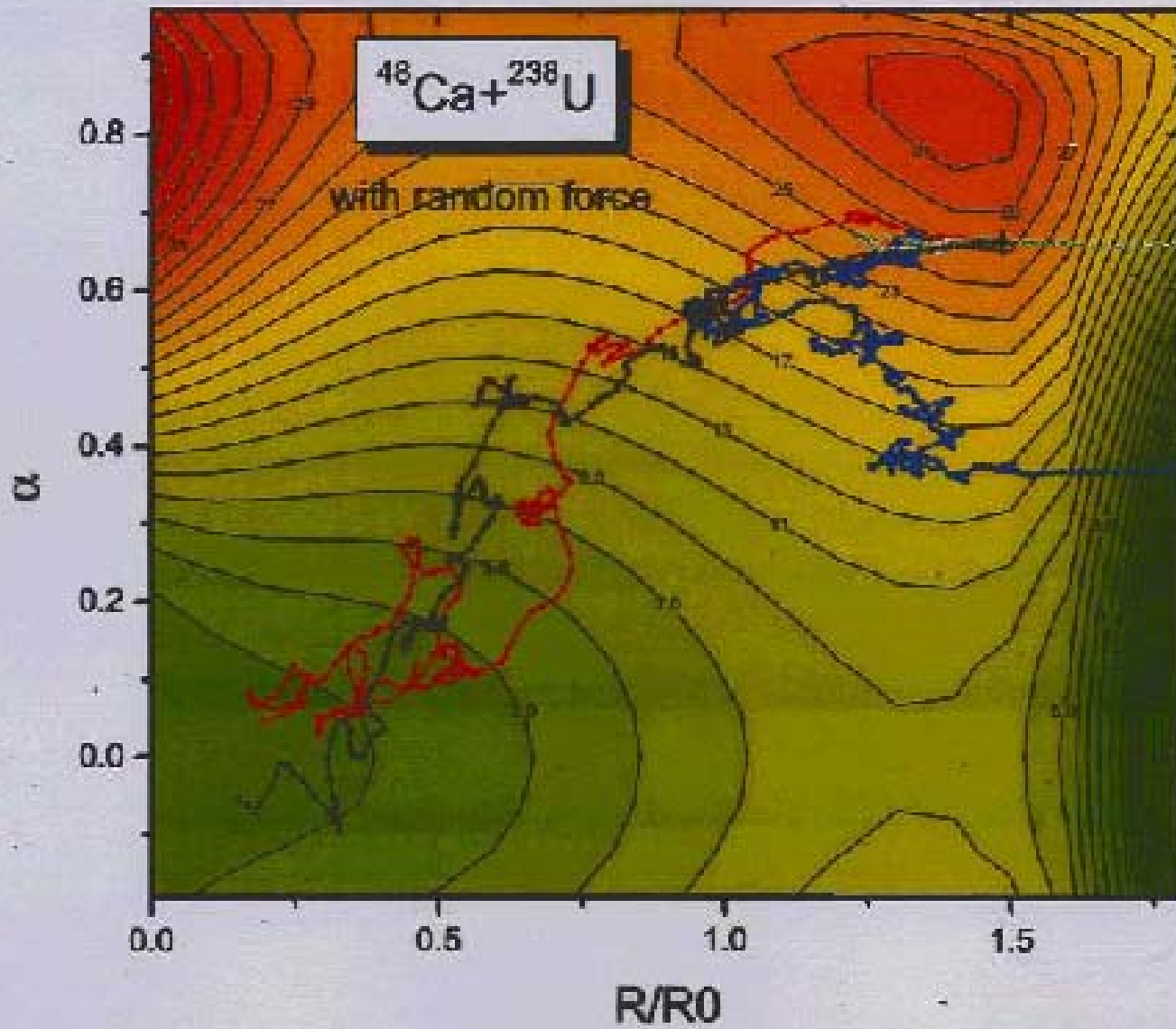
新しい2段階模型

融合反応を二つの引き続く過程として記述する。クーロン障壁通過過程と二つの原子核が接合して出来た洋ナシ形の複合系が球形複合核を形成する過程である。2体衝突過程を前半とし、1体の形状変化過程を後半として、これらを結合する。従来は、それぞれ、それだけで融合の全過程を記述するものとして研究が行われてきた。

ただし、後半では、摩擦力だけでなく、揺動力も含めた多次元LDMポテンシャル上の確率的運動を取り扱う。即ち、平均軌道のみならず、その周りの分散も取り入れる。

[C.W. Shen et al., PR C66(2002)061602(R)]

[Y. Abe et al. Acta Phys. Pol. B34(2003)2091]



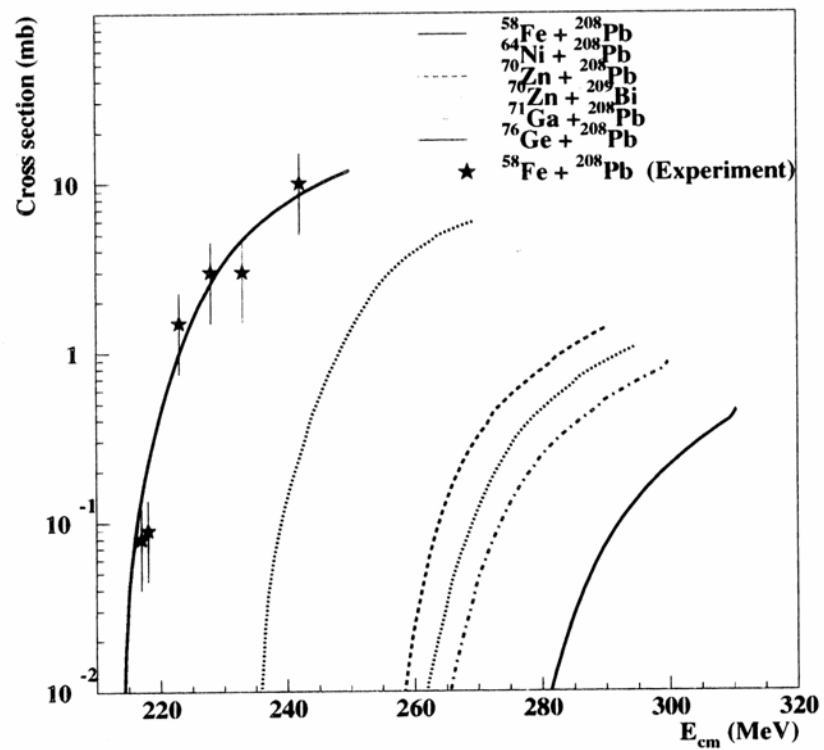


Figure 6. Calculated fusion excitation functions are presented for the systems of the cold fusion paths, together with the available data on the system $^{58}\text{Fe} + ^{208}\text{Pb}$.