

非平衡Thermo Field Dynamicsの レビューと冷却原子系への応用

研究会「重イオン衝突と非平衡物理の理論的発展」

2012年2月18日

早稲田大学基幹理工学部 山中 由也

初めに

場の量子論系の非平衡現象を記述する理論形式

Closed Time Method (略してCPT、Schwinger-Keldysh)

Thermo Field Dynamics (略してTFD、平衡系Takahashi-Umezawa)

真空中とは異なる粒子描像

準粒子描像

ユニタリー非同値表現（自発的対称性の破れ）

場の量子論系の粒子描像

- 状態空間＝非摂動ハミルトニアンの選択
- 非平衡系でその時間変化をどう取り入れるか → 相転移
- 密度行列のトレース和 \Leftrightarrow どの完全系（粒子描像）で和を取るか

話しの流れ

これなしには解析不能

1. CPTとTFDの定式化

- Wick定理 \Rightarrow Feynman diagram
 - 粒子描像 = 状態空間 = 非摂動ハミルトニアン
 - Path integralではimplicit \rightarrow Canonical formalism
 - 真空場の量子論との相違
- ミクロとマクロの共存
- 粗視化

2. 量子輸送方程式の導出

- Dyson方程式から自己無撞着に導出

3. TFDの冷却原子系への応用

共同研究者 中村 祐介

Keldysh経路

期待値 $\langle \bar{c} c \bar{q} q \rangle = \text{Tr}[\frac{1}{2}H \bar{c} c \bar{q} q] = \text{Tr}[\frac{1}{2}(t_0) \bar{c} c \bar{q} q]$

相互作用描像 coincidence time $t_0 = i - 1$

$$\hbar A_H(t)i = \hbar \frac{1}{2}(i - 1)U(i - 1; 1)U(1; t)A(t)U(t; i - 1)i$$

$$= \hbar S^{i-1} T [S A(t)]i \quad \text{↔ 真空理論 Gell-Mann-Low relation}$$

$$\hbar 0j S^{i-1} = e^{i^\circ} \hbar 0j$$

$$= \hbar T_c [S_c A(t)]i$$

T_c 積 : Keldysh経路(時間の往復路)上の順に並べる演算



Wick展開 (1)

P. Danielewicz, Ann. Phys. (N.Y.) **152**, 239 (1984).

J. Rammer, Quantum Field Theory of Non-equilibrium States (Cambridge Univ, Cambridge, 2007).

北 孝文, 物性研究 90, 1 (2008); Prog. Theor. Phys. 123, 581 (2010).

$t_0 = i\beta$ で熱平衡状態

time-dependent external disturbanceを加える

$$\gamma_H = \gamma(i\beta) / e^{i\beta H} = e^{i\beta H_0} T_{c_a} e^{i\int_{t_0}^{\beta} H_{int}(s) ds}$$

虚軸に延長、Matsubara法

$$\begin{aligned} \hbar A_H(t)i &= \text{Tr} \left[e^{i\beta H} T_c [S_c A(t)] \right]' = \text{Tr} \left[e^{i\beta H} T_c [S_c] \right]' \\ &= \text{Tr} \left[e^{i\beta H_0} T_{c+c_a} [S_{c+c_a} A(t)] \right]' = \text{Tr} \left[e^{i\beta H_0} T_{c+c_a} [S_{c+c_a}] \right]' \end{aligned}$$

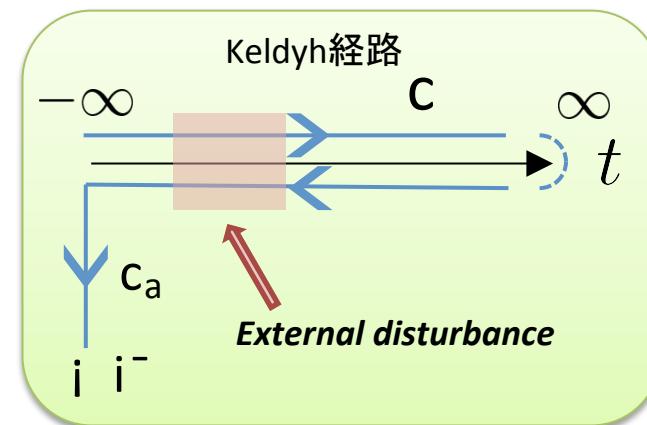
→ $\text{Tr} [\gamma_0 T_c [S_c A(t)]]$

$$\gamma_0 = e^{i\beta H_0} = \text{Tr} \left[e^{i\beta H_0} T_c [S_c] \right]' = e^{i\beta H_0} = \text{Tr} \left[e^{i\beta H_0} \right]'$$

虚軸は寄与しない

初期相関の消失=Gaussianからの初期のずれ
はthermal fluctuationでwipe outされる

非平衡状態の実現



結局 γ_H / γ_0 、contour c のみ
→ Wick定理

Wick展開 (2)

Wick定理 (Bloch-de Dominicis定理)

$$\begin{aligned} hT_c [A_1 A_2 \dots A_{2N}] i_0 &= \operatorname{Tr}_{\mathcal{X}} [h T_c [A_1 A_2 \dots A_{2N}]]_h \\ &= \sum_p h T_c [A_{\frac{p}{2}} A_{\frac{p}{2}}] i_0 \dots h T_c [A_{\frac{p}{2N-1}} A_{\frac{p}{2N}}] i_0 \end{aligned}$$

次の関係式が必要

$$a^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} a$$

$$a^{\frac{1}{2}} = p^{i-1} \frac{1}{2} a^y$$



本当は a, p ではなく a_ℓ, p_ℓ

$$\rho = \prod_\ell \left[(1 - p_\ell) \sum_{m_\ell=0}^{\infty} p_\ell^{m_\ell} |m_\ell\rangle \langle m_\ell| \right]$$

$$\frac{1}{2} = (1 + p)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} p^m j_m i_h m_j$$

平衡系なら $p = e^{i^{-1} (!i^{-1})}$
ただし平衡分布に限る必要なし

Green関数の計算にFeynman diagram法

diagram — connected, proper, one particle-irreducible

Schwinger-Dyson方程式

Dyson方程式 (self-energy) etc

Keldysh Green関数

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}; t)$$



Green関数とDyson方程式

$$G(x_1^c, x_2^c) = -i \langle T_c [\psi_H(x_1^c) \psi_H^\dagger(x_2^c)] \rangle$$

$$G(x_1^c, x_2^c) = \Delta(x_1^c, x_2^c) + \int_c dy_1^3 dy_2^3 dt_1^c dt_2^c \Delta(x_1^c, y_1^c) \Sigma(y_1^c, y_2^c) G(y_2^c, x_2^c)$$

時間がKeldysh経路上にあるのがポイント



x_1, x_2 が往路にあるのか復路にあるのかで場合分け
 \Rightarrow Green関数を2×2行列とする

2×2行列のGreen関数 (KeldyshのGreen関数) とDyson方程式

$$G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} G^c(x_1, x_2) & G^<(x_1, x_2) \\ G^>(x_1, x_2) & G^{\tilde{c}}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \langle T[\psi_H(x_1) \psi_H^\dagger(x_2)] \rangle & -i \langle \psi_H^\dagger(x_2) \psi_H(x_1) \rangle \\ -i \langle \psi_H(x_1) \psi_H^\dagger(x_2) \rangle & -i \langle \tilde{T}[\psi_H(x_1) \psi_H^\dagger(x_2)] \rangle \end{pmatrix}$$

$$G(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) + \int dy_1^4 dy_2^4 \Delta(x_1, y_1) \tau_3 \Sigma(y_1, y_2) \tau_3 G(y_2, x_2)$$

CPT まとめ

- Keldysh経路導入
 - ⇒ 2×2 行列Green関数
- 初期平衡分布
 - ⇒ Wick定理成立のみ、初期温度無関係
 - ⇒ 初期に粒子描像（非摂動ハミルトニアン）を確定
- External disturbance で非平衡状態を実現
 - ⇒ 詳しく記述することはない

TFD (Thermo Field Dynamics)

H. Umezawa, Advanced Field Theory | Micro, Macro, and Thermal Physics (AIP, New York, 1993).

混合状態期待値を、自由度を倍加して純粋状態期待値で表す

a^\dagger ! a ; \tilde{a}

元々の自由度 : non-tilde
新たな自由度 : tilde

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \text{Tr}[\frac{1}{\beta} A] - ! - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\text{th}}$$

熱的真空 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\text{th}}$ の期待値

超演算子形式 \Rightarrow TFD形式

非摂動形式—超演算

一様系でも 有限サイズ系でも

$$H_0 = \int d^3k \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad H_0 = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^\dagger a_{\ell}$$

まったく同じように定式化できる
局所近似はしないで粒子描像

非摂動ハミルトニアンを対角化する演算子で作る

$$H_0 = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^\dagger a_{\ell} \quad |m\rangle_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{m!}} (a_{\ell}^\dagger)^m |0\rangle_{\ell}$$

規格化された非摂動密度演算子

$$\rho = (1 - p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle \langle m|$$

M. Scumutz, Z. Physik B **30**, 97 (1978).

密度演算子に対応する超ケット

$$|\rho\rangle\!\rangle = (1 - p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle \langle m|$$

熱的状態条件

$$a \rho - p \rho a = 0$$

$$\rho a^\dagger - p a^\dagger \rho = 0$$

$$(a - p \tilde{a}^\dagger) |\rho\rangle\!\rangle = 0$$

$$(\tilde{a} - p a^\dagger) |\rho\rangle\!\rangle = 0$$

トレース演算に対応する超ブラ

$$\langle\!\langle 1 | = \sum_m \langle m | \bullet | m \rangle$$

トレースの循環性

$$\text{Tr}[a \bullet] = \text{Tr}[\bullet a]$$

$$\langle\!\langle 1 | (a - \tilde{a}^\dagger) = 0$$

$$\langle\!\langle 1 | (a^\dagger - \tilde{a}) = 0$$



熱的期待値 : $\text{Tr}[A \rho] = \langle\!\langle 1 | A | \rho \rangle\!\rangle$

二重化のルール（チルダルルール）

超演算子 a, \tilde{a} に関する代数 :

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$$

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = 0$$

証明) $[a, \tilde{a}] |R\rangle\!\rangle = (a\tilde{a} - \tilde{a}a) |R\rangle\!\rangle = a(Ra^\dagger) - (aR)a^\dagger = 0$

任意の超ケット $|R\rangle\!\rangle$

全ハミルトニアン

$$\hat{H} = H - \tilde{H}$$

力学 : Schrödinger 描像、Liouville 方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho_s = [H, \rho_s] = H\rho_s - \rho_s H \quad \Rightarrow \quad i \frac{d}{dt} |\rho_s\rangle\!\rangle = (H - \tilde{H}) |\rho_s\rangle\!\rangle$$

Liouvillian

倍加されたFock空間

$$\begin{aligned}
 |\rho\rangle\langle\rho| &= (1-p) \sum_m p^m |m\rangle\langle m| \xrightarrow{\quad} (1-p) \sum_m p^m |m\rangle \otimes |m\rangle \equiv |0\rangle \\
 &\quad \begin{matrix} a, a^\dagger & \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger \end{matrix} \\
 \langle\langle 1 | &= \sum_m \langle m | \bullet | m \rangle \xrightarrow{\quad} \sum_m \langle m | \otimes \langle m | \equiv \langle 0 |
 \end{aligned}$$

熱的真空

熱的期待値

混合状態

$\text{Tr } A \rho$

超プラと超ケット

$\langle\langle 1 | A | \rho \rangle\rangle$

倍加されたFock空間の
純粹状態

$\langle 0 | A | 0 \rangle$

=TFD

TFD : 空間を倍加した純粹状態で、熱的な混合状態を扱う！

熱的Bogoliubov変換

a, \tilde{a} は熱的真空を消去しない

$$\begin{aligned} a|0\rangle &\neq 0 \\ \tilde{a}|0\rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

熱的真空を消去する演算子 $\xi, \tilde{\xi}$ を導入
= 热的Bogoliubov変換

熱的Bogoliubov変換

SU(1,1)群の3つのパラメータ $n; {}^\circ; s$

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu} a^\nu$$

$$\bar{\xi}^\nu = \bar{a}^\mu B^{-1,\mu\nu}$$

$$B = \sqrt{1+n} e^{s\tau_3} \begin{pmatrix} 1 & -p^\alpha \\ -p^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^\mu &= \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \\ \bar{a}^\mu &= \begin{pmatrix} a^\dagger & -\tilde{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

各モード粒子数 (平衡系: Bose-Einstein分布)

2つのパラメータ自由度

α 热的真空の定義

$$\text{Tr}[A\rho] = \text{Tr}[\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha]$$

← 密度行列の情報をブラ・ケット
どちらに持たせるか?

s スケール変換

$$\xi \rightarrow c\xi, \quad \xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger/c$$

s も α も平衡系では意味のない自由度

何にとっても結果は変わらない

T. S. Evans et al., J. Math. Phys. 33, 370 (1992).

しかし非平衡系では、
重要になってくる!

Heisenberg描像と相互作用描像

Heisenberg描像、相互作用描像：自由度の二重化と正準交換関係

$$a \xrightarrow{\hspace{1cm}} a, \tilde{a} \quad [a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$$

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = 0$$

Heisenberg描像：Heisenberg方程式

$$i \frac{d}{dt} a_H(t) = a_H(t); \hat{H} \quad \hat{H} = H - \tilde{H}$$

$$i \frac{d}{dt} \tilde{a}_H(t) = \tilde{a}_H(t); \hat{H}$$

ハットハミルトニアン

相互作用描像：熱的Bogoliubov変換、熱的真空

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu} a^\nu \quad B = \sqrt{1+n} e^{s\tau_3} \begin{pmatrix} 1 & -p^\alpha \\ -p^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix} \quad \xi|0\rangle = \tilde{\xi}|0\rangle = 0$$

$$\bar{\xi}^\nu = \bar{a}^\mu B^{-1,\mu\nu} \quad \langle 0|\xi^\dagger = \langle 0|\tilde{\xi}^\dagger = 0$$

Feynman diagram

$$\hat{H}_{\text{int}} = H_{\text{int}} - \tilde{H}_{\text{int}}$$

相互作用描像とHeisenberg描像

$$A(t) = \hat{U}(t, -\infty) A_H(t) \hat{U}(-\infty, t)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \text{T exp} \left(-i \int_{t_0}^t ds \hat{H}_{\text{int}}(s) \right)$$

時間順序積でまとまるか?
Wick展開 ← 熱的真空

$$\hat{S} = \text{T exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} ds \hat{H}_{\text{int}}(s) \right)$$

$$\langle 0 | A_H(t) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{S}^{-1} \text{T}[A(t)\hat{S}] | 0 \rangle$$

$$\alpha = 1 \text{ ならば } \langle 0 | (a - \tilde{a}^\dagger) = 0$$

$$\rightarrow \langle 0 | \hat{H}_{\text{int}}(t) = 0$$

$$\rightarrow \langle 0 | \hat{S}^{-1} = 0$$

平衡では任意の α でも
Feynman図法が使える
(p が特別な形をしている為)

非平衡では $\alpha = 0, 1$ が必要

T. S. Evans *et al.*, J. Math. Phys. 33, 370 (1992).

$$\langle 0 | A_H | 0 \rangle = \langle 0 | \text{T}[A \hat{S}] | 0 \rangle$$



Wickの定理



Feynman diagram、Dyson方程式
が使える形式！
Keldysh経路は不要
ただし、特定の α を選ぶ必要あり

非平衡化

$$n = \langle a^\dagger a \rangle = \frac{p}{(1-p)}$$

非摂動状態の密度行列を仮定

$$\rho = (1-p) \sum_m p^m |m\rangle\langle m|$$

ただし時間依存する非平衡分布

$$n \rightarrow n(t)$$

$$p \rightarrow p(t)$$

~~$p = e^{i^{-}(\vec{i}\vec{i}^{-1})}$~~

- マクロ量（熱力学的量）粒子分布 $n(t)$ は未知として導入
その時間依存性はミクロな力学と自己無撞着に決定
- 時間に対してある種の粗視化＝
各時刻でInitial correlationの消失を反映
- 時間変化する粒子分布・描像を追いかける形式（相互作用描像）

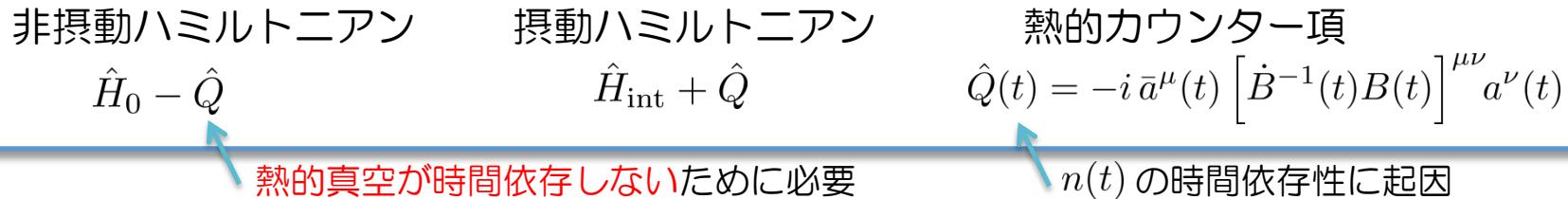
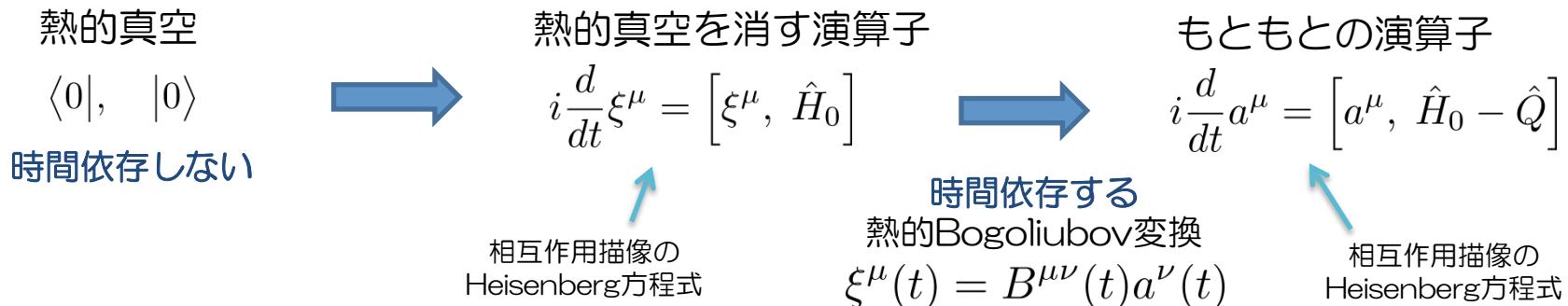
熱的真空が時間依存しない条件

相互作用ハミルトニアンを選ぶ必要がある。

非平衡TFDの構造

$$n = \langle a^\dagger a \rangle = p/(1-p)$$

$$n_H = \langle a_H^\dagger a_H \rangle \neq n$$



まだ \dot{n} が決まっていない！！

何らかの方法で \dot{n} を決定する必要がある。

非平衡TFDでもFeynman図法がつかえるか？

α, s の自由度をどうするか？

$$\begin{cases} a^\mu = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} & \xi^\mu = \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix} \\ B^{\mu\nu} = \sqrt{1+n} e^{s\tau_3} \begin{pmatrix} 1 & -p^\alpha \\ -p^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

非摂動伝搬関数

$$\left. \begin{array}{l} \xi^\mu = \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix} \quad a^\mu = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \\ \bar{\xi}^\mu = (\xi^\dagger \quad -\tilde{\xi}) \quad \bar{a}^\mu = (a^\dagger \quad -\tilde{a}) \end{array} \right\}$$

演算子が2重項だから、伝搬関数は 2×2 行列

相互作用描像

Heisenberg描像

a の伝搬関数

非摂動伝搬関数 $\Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T [a_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle$

全伝搬関数 $G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T [a_{H,\ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{H,\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle$

ξ の伝搬関数

非摂動伝搬関数 $d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T [\xi_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle$

全伝搬関数 $g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T [\xi_{H,\ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{H,\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle$

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \delta_{\ell_1 \ell_2} \begin{pmatrix} -i\theta(t_1 - t_2) & 0 \\ 0 & i\theta(t_2 - t_1) \end{pmatrix}^{\mu\nu} e^{-i\omega_{\ell_1}(t_1 - t_2)}$$

両者の関係

$$\Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2)$$

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2)$$

因果律・時間の向き

具体的な a の非摂動伝搬関数の構造 $\Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2)$

$$\Delta^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -ie^{-i\omega(t_1-t_2)} [\theta(t_1-t_2)R^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \theta(t_2-t_1)A^{\mu\nu}(t_1, t_2)]$$

$R^{\mu\nu}(t_1, t_2)$ $t_2 \rightarrow t_1$ 粒子の伝搬の係数 $n ; {}^\circledast ; s$ at t_1 and t_2 の関数
 $A^{\mu\nu}(t_1, t_2)$ $t_1 \rightarrow t_2$ 粒子の伝搬の係数

熱的時間の向き（不可逆性） \Rightarrow マクロ量(n 等)に関する因果律
 要請 $R^{\mu\nu}(t_2)$ $A^{\mu\nu}(t_1)$ となれ！

← 時間方向粗視化

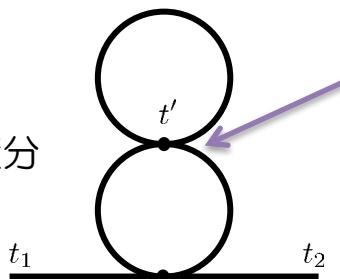
$${}^\circledast(t) = 1$$

$$s(t) = \log \frac{1}{1+n(t)}$$

- Feynman diagram, Dyson方程式が使える
- 未来の n 情報に依存しない物理量の計算

α, s 自由度が固定される

internal vertex 時間積分



$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'$$

一般には未来の $n(t)$ を知りないと計算できない！

Feynman diagram法と時間の向き

- ミクロな時間の向きの対称性 Heisenberg方程式
- マクロな時間の向きの選択

Feynman diagramが使える
マクロな時間の向きの選択

$$t_0 = -\infty$$

$$\alpha = 1$$

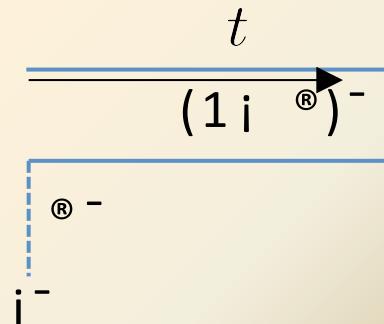
$$s = \log \sqrt{1+n}$$

$$t_0 = \infty$$

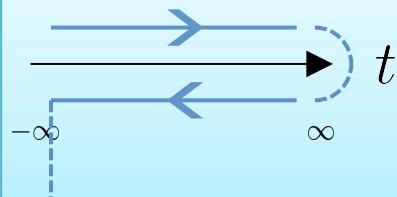
$$\alpha = 0$$

$$s = -\log \sqrt{1+n}$$

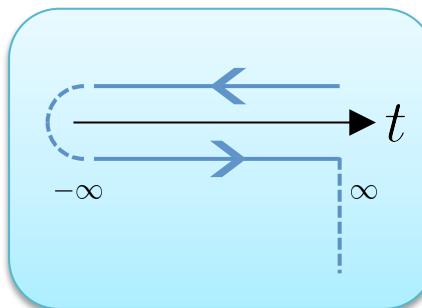
平衡系
任意の[®]でFeynman diagram
物理量は[®]に依存しない



Keldysh経路



エントロピー増大
(物理的時間の向き)



エントロピー減少
(非物理的時間の向き)

繰り込み条件

$\dot{n}_\ell(t)$ に対する方程式 = 量子輸送方程式



の場合

Y. Yamanaka et al, Int. J. Mod. Phys. A 9, 1153 (1994).



一般化

Chu-Umezawaの繰り込み条件

$$g_{\ell\ell}^{12}(t, t) = 0$$

H. Chu and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A 10, 1693 (1995).

- 短時間では $g_{\ell\ell}^{\mu\nu}$ が $d_{\ell\ell}^{\mu\nu}$ と同じ構造を持つという要請
- counter term Q を決める
- 自己無撞着に決定

Chu-Umezawa条件で決着しているわけではない
最低次ではよさそう

$$n_{H,\ell}(t) = n_\ell(t) - ig_{\ell\ell}^{12}(t, t) \quad \rightarrow \quad n_{H,\ell}(t) = n_\ell(t) \text{を要請している}$$

しかし高次では一般に $n_{H,\ell}(t) \neq n_\ell(t)$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{非摂動伝搬関数} & d_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} d_{\ell_1\ell_2}^{11}(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & d_{\ell_1\ell_2}^{22}(t_1, t_2) \end{pmatrix} \\ \text{全伝搬関数} & g_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} g_{\ell_1\ell_2}^{11}(t_1, t_2) & g_{\ell_1\ell_2}^{12}(t_1, t_2) \\ 0 & g_{\ell_1\ell_2}^{22}(t_1, t_2) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

量子輸送方程式の導出 – 2つの粒子数分布

- (a) 時間依存 n から出発し、その時間依存性を自己無撞着に決定
 n_H は n の補正を計算して求める
- (b) 初期の n を導入するが、時間依存 n は導入しない
 n_H は時間依存するものとする ← 補正（摂動）計算はしない

CTP

(b) を採用。

Kadanoff-Baym方程式、Wigner表示、勾配展開、 Φ 微分近似。

導出されるもの： n_H に対する量子輸送方程式

TFD

(a) を採用。

ただし(b)を採用することもできる。（結果はCTPとまったく同じになる）

導出されるもの： n に対する量子輸送方程式

CPT

CTP 輸送方程式の導出

Kadanoff-Baym方程式 (Dyson方程式をより導かれる) $x = (x; t)$

$$(i\partial_{t_1} - h_0(x_1))G^{\gtrless}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{t_1} d^4y [\Sigma^>(x_1, y) - \Sigma^<(x_1, y)] G^{\gtrless}(y, x_2) - \int_{-\infty}^{t_2} d^4y \Sigma^{\gtrless}(x_1, y) [G^>(y, x_2) - G^<(y, x_2)]$$

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad r = x_1 \dot{+} x_2$$

時空の変化がゆっくり

Wigner表示 $G(x_1; x_2) = G(X; r) ! G(X; p) !$ 一次の勾配展開

$$\left\{ \Delta^{-1} - \text{Re}\Sigma^R, iG^{\gtrless} \right\} - \left\{ i\Sigma^{\gtrless}, \Delta^{-1} - \text{Re}\Sigma^R \right\} = G^<\Sigma^> - G^>\Sigma^<$$

Full Green関数にスペクトル表示 → 準粒子近似をする
自己エネルギーを Φ 微分近似で計算

粒子描像の導入

$$n_H(p, x, t) = \int d^3\bar{x} \langle \psi_H^\dagger(x - \frac{\bar{x}}{2}, t) \psi_H(x + \frac{\bar{x}}{2}, t) \rangle e^{-ip \cdot \bar{x}}$$
 の時間変化を記述する方程式を得る

Wigner表示の分布関数

量子Boltzmann方程式

量子Boltzmann方程式

$$\frac{\partial n_H}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot c \frac{\partial n_H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot c \frac{\partial n_H}{\partial p} = I [n_H; x; t; p]$$

衝突積分 Markov性

$$I [n_H; x; t; p] = 2g^2 \sum_{i=2}^{4} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 (p + p_2 + p_3 + p_4) \\ \times [(1 + n_H)(1 + n_{H;2})n_{H;3}n_{H;4} + n_H n_{H;2}(1 + n_{H;3})(1 + n_{H;4})]$$

TFD 伝搬関数の構造

Cf. 相互作用描像

$$\begin{array}{ll} \langle 0 | \xi^\dagger = 0 & \langle 0 | \tilde{\xi}^\dagger = 0 \\ \xi | 0 \rangle = 0 & \tilde{\xi} | 0 \rangle = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} t_0 &= -\infty \\ \alpha &= 1 \\ s &= \log \sqrt{1+n} \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

相互作用ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H}_I &= 0 \\ \hat{H}_I | 0 \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

Heisenberg描像

$$\begin{array}{ll} \langle 0 | \xi_H^\dagger = 0 & \langle 0 | \tilde{\xi}_H^\dagger = 0 \\ \xi_H | 0 \rangle \neq 0 & \tilde{\xi}_H | 0 \rangle \neq 0 \end{array}$$

 ξ の全伝搬関数

$$g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} g_{\ell_1 \ell_2}^{11}(t_1, t_2) & g_{\ell_1 \ell_2}^{12}(t_1, t_2) \\ 0 & g_{\ell_1 \ell_2}^{22}(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

↑ 遅延
↓ 先進

 a の全伝搬関数

$$G^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B^{-1, \mu\mu'}(t_1) g^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B^{\nu'\nu}(t_2)$$

上三角行列を熱的Bogoliubov変換した構造

時間依存！

$$\begin{aligned} g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) &= -i \langle 0 | T [\xi_{H, \ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{H, \ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \\ G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) &= -i \langle 0 | T [a_{H, \ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{H, \ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

Cf. Keldysh変換

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^R(t_1, t_2) & G^K(t_1, t_2) \\ 0 & G^A(t_1, t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 似ているけど違う。
- 定義の順番が逆。TFDでは $g \rightarrow G$

Dyson方程式

Dyson方程式で自己エネルギーを定義

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 \Delta_{\ell_1 m_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) \Sigma_{m_1 m_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) G_{m_2 \ell_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2)$$

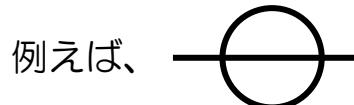
$$g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 d_{\ell_1 m_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) S_{m_1 m_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) g_{m_2 \ell_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2)$$

伝搬関数と同じ構造

$$S_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} S_{\ell_1 \ell_2}^{11}(t_1, t_2) & S_{\ell_1 \ell_2}^{12}(t_1, t_2) \\ 0 & S_{\ell_1 \ell_2}^{22}(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) S_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2)$$

自己エネルギーは摂動で計算する



$$\Sigma(t_1, t_2) = c \Delta(t_1, t_2) \Delta(t_1, t_2) \Delta(t_2, t_1)$$

a の自己エネルギー

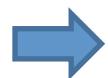
ξ の自由エネルギー

2つの分布関数の関係

- 非摂動の粒子分布 $n = \langle a^\dagger a \rangle$ Bose-Einstein分布
- Heisenbergの粒子分布 $n_H = \langle a_H^\dagger a_H \rangle$ 観測される分布

n_H を ξ_H の言葉で書いてみると

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_H^\dagger a_H | 0 \rangle &= \langle 0 | \{\tilde{\xi}_H + (1+n)\xi_H^\dagger\} \{\xi_H + n\xi_H^\dagger\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \tilde{\xi}_H \xi_H | 0 \rangle + n \langle 0 | \tilde{\xi}_H \tilde{\xi}_H^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$



$$n_{H,\ell}(t) = n_\ell(t) - i g_{\ell\ell}^{12}(t, t)$$

最低次の非対角要素

Dyson方程式 $g = d + dSg$ より

$$g_{\ell\ell}^{12}(t, t) = \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 g_{\ell m_1}^{11}(t, s_1) S_{m_1 m_2}^{12}(s_1, s_2) g_{m_2 \ell}^{22}(s_2, t)$$

$$\simeq \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 d_{\ell m_1}^{11}(t, s_1) S_{m_1 m_2}^{12}(s_1, s_2) d_{m_2 \ell}^{22}(s_2, t)$$

$$= 2i\text{Im} \int_{-\infty}^t ds_1 \int_{-\infty}^{s_1} ds_2 S_{\ell\ell}^{12}(s_1, s_2) e^{i\omega_\ell(s_1 - s_2)}$$

全伝搬関数

近似

非摂動伝搬関数

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{11}(t_1, t_2) = -i\delta_{\ell_1 \ell_2} \theta(t_1 - t_2) e^{-i\omega_{\ell_1}(t_1 - t_2)}$$

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{22}(t_1, t_2) = i\delta_{\ell_1 \ell_2} \theta(t_2 - t_1) e^{-i\omega_{\ell_1}(t_1 - t_2)}$$

平衡なら

$$= \int_{-\infty}^t ds S_{\ell\ell}^{12}(k_0) \Big|_{k_0=\omega_\ell}$$

$S_{\ell\ell}^{12}(k_0)$: $S_{\ell\ell}^{12}(t_1 - t_2)$ のFourier変換

$$= 0$$

衝突積分。平衡分布なら自動的に 0

量子輸送方程式

非平衡系に繰り込み条件 $g_{\ell\ell}^{12}(t, t) = 0$ を課す

摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_I = \hat{H}_{\text{int}} + \hat{Q}$$

相互作用項

$$\hat{Q}(t) = -i \bar{a}^\mu(t) \left[\dot{B}^{-1}(t) B(t) \right]^{\mu\nu} a^\nu(t)$$

熱的カウンター項

非摂動分布関数 $n_\ell(t)$ が
時間依存することに由来

量子輸送方程式

$$\dot{n}_\ell(t) = 2\text{Im} \int_{-\infty}^t ds S_{\ell\ell}^{12, \text{int}}(t, s) e^{i\omega_\ell(t-s)}$$

自己エネルギー

$$S = S^{\text{int}} + S^Q$$

S^{int} と S^Q に分解
(相互作用項) (熱的カウンター項)

$$S_{\ell_1 \ell_2}^{Q, \mu\nu}(t_1, t_2) = -i \dot{n}_{\ell_1}(t_1) \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta(t_1 - t_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

- 非摂動分布関数に対する閉じた方程式
- 過去の分布に依存する (非Markov型)
- 未来の分布には依存しない (因果律)

あとは、具体的に $S_{\ell\ell}^{12, \text{int}}$ を計算すればよい。
29

量子輸送方程式導出 まとめ

CTPとTFD共通

2×2行列Green関数に対するDyson方程式

← Heisenberg方程式、Feynman diagram法



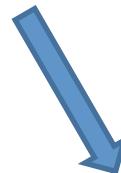
CTP

n_H に対する量子輸送方程式

= 量子Boltzmann方程式 (Markov)

ダイアグラムの補正計算なし

Wigner表示、勾配展開、準粒子近似



TFD

n に対する量子輸送方程式 (非Markov)

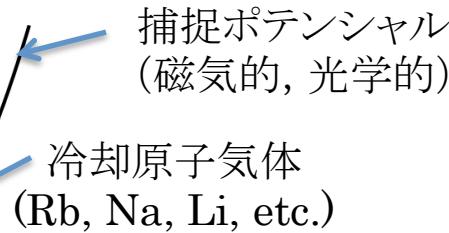
ダイアグラムの補正計算

→ 繰り込み条件

時間方向の粗視化

冷却原子系

冷却原子系 1995年Bose-Einstein condensationの実現

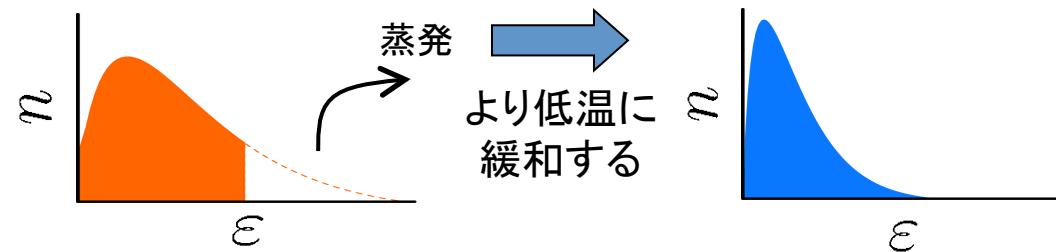
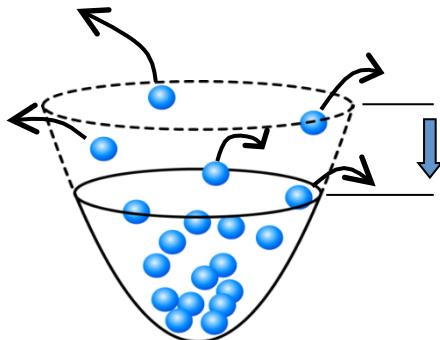


温度: $\sim \mu\text{K}$
大きさ: $\sim \mu\text{m}$
原子数: $10^3 \sim 10^6$

- Bose-Einstein凝縮
- パラメータ制御性が良い
- 希薄、弱い相互作用、低温
- 熱緩和がゆっくり
- 様々な非平衡過程

非平衡TFDの検証

蒸発冷却法: 捕捉ポテンシャルを下げ、高いエネルギーの原子を蒸発させ、冷却する



- 外部ポテンシャル擾乱による非平衡過程
- Bose-Einstein凝縮体中の高次渦の崩壊
- 光学格子中の流れのあるBose-Einstein凝縮体の崩壊 etc

Y. Nakamura et al, Ann. Phys. 325, 426 (2010).

Y. Nakamura and Y. Yamanaka, Ann. Phys. 326, 1070 (2011).

凝縮体の2種類の不安定性

$$H = \int d^3x \left[\psi^\dagger(x) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x) - \mu \right) \psi(x) + g \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right]$$

$$\psi(x) = \zeta(x) + \varphi(x)$$

$$x = (x; t)$$

秩序変数

V 捕捉ポテンシャル

μ 化学ポテンシャル

g 相互作用定数

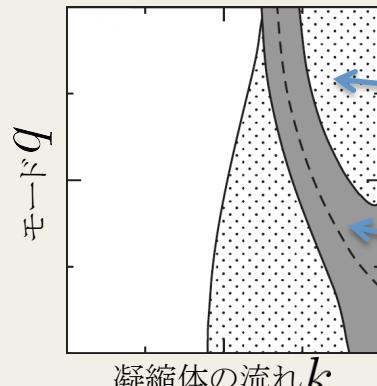
Gross-Pitaevski方程式 : $^3(x)$

Bogoliubov-de Gennes方程式 : $'(x)$ を展開する波動関数

- 負固有値存在 \Rightarrow Landau不安定性 (エネルギー散逸)
- 複素固有値存在 \Rightarrow 動的不安定性 (指数関数的変化) $\delta\zeta \sim e^{i\omega t}$

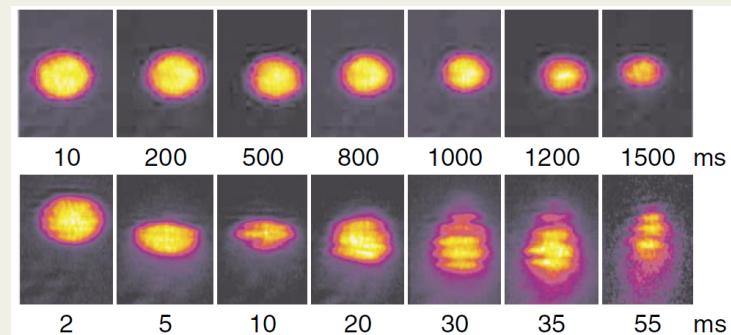


例: 光学格子中を流れる凝縮体 における実験と解析



Landau不安定

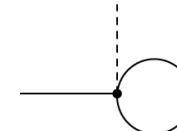
動的不安定



- 自由度の二重化
- 秩序変数の導入 ${}^3(x) = h\tilde{A}_H(x)i \quad \tilde{A}_H(x) = {}^3(x) + {}'_{H}(x) \quad h'_{H}(x)i = 0$

時間依存GP方程式 $i\partial_t \zeta = [K + V - \mu + g(|\zeta|^2 + 2\tilde{n}(x)) - i\gamma] \zeta + g\tilde{m}(x)\zeta^*$

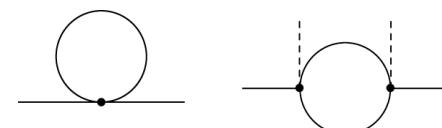
- 相互作用描像 $'(x)$ を展開する適切な波動関数の完全系
- a 、に含まれる未知関数 $n\cdot(t)$



時間依存BdG方程式 $i\partial_t y_\ell = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} y_\ell \quad L = K + V i^{-1} + 2gj^3 j^2 \quad M = g^3 j^2$

- $'_{H}(x)$ Green関数のDyson方程式 自己エネルギーFeynman diagram計算
- 繰り込み条件

量子輸送方程式 $\dot{n}_\ell(t) = 2g^2 \text{Re} \int_{-\infty}^t dt' \sum_{\ell_1 \ell_2} \left[\{ n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_\ell) - (1 + n_{\ell_1})(1 + n_{\ell_2}) n_\ell \}_{t'} (\langle y_\ell, \chi_{yy} \rangle_t \langle \chi_{yy}, y_\ell \rangle_{t'}) \right. \\ \left. + \{ n_{\ell_1} (1 + n_{\ell_2})(1 + n_\ell) - (1 + n_{\ell_1}) n_{\ell_2} n_\ell \}_{t'} (\langle y_\ell, \chi_{yz} \rangle_t \langle \chi_{yz}, y_\ell \rangle_{t'}) \right. \\ \left. + \{ (1 + n_{\ell_1}) n_{\ell_2} (1 + n_\ell) - n_{\ell_1} (1 + n_{\ell_2}) n_\ell \}_{t'} (\langle y_\ell, \chi_{zy} \rangle_t \langle \chi_{zy}, y_\ell \rangle_{t'}) \right. \\ \left. + \{ (1 + n_{\ell_1}) (1 + n_{\ell_2})(1 + n_\ell) - n_{\ell_1} n_{\ell_2} n_\ell \}_{t'} (\langle y_\ell, \chi_{zz} \rangle_t \langle \chi_{zz}, y_\ell \rangle_{t'}) \right]$



BEC不安定系の非平衡TFD

1次元光学格子中の流れのある凝縮体 1D Bose-Hubbardモデル

$$H = \sum_i \left[-J\psi_i^\dagger(\psi_{i+1} + \psi_{i-1}) - \mu\psi_i^\dagger\psi_i + \frac{U}{2}\psi_i^\dagger\psi_i^\dagger\psi_i\psi_i \right]$$

流れのある凝縮体が存在するとする

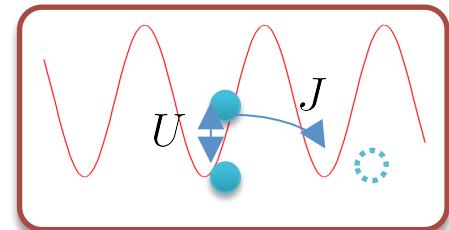
$$\psi_i = \zeta_i + \varphi_i \quad \langle 0 | \varphi_i | 0 \rangle = \zeta_i = \sqrt{\frac{N_0}{I_s}} e^{ikx_i}$$

計算条件

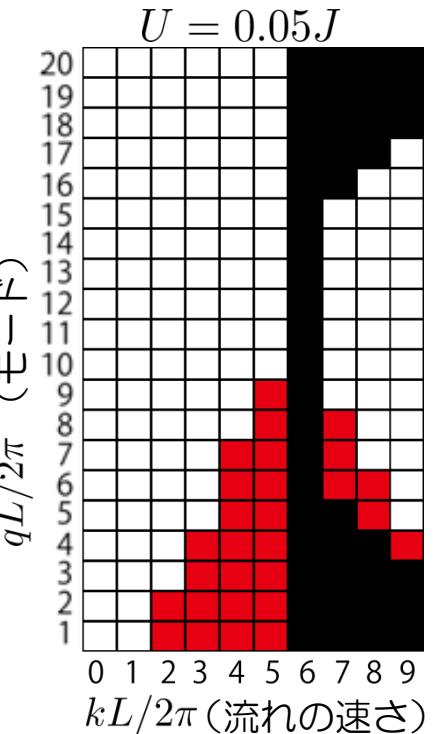
適当な非平衡分布を初期条件に、時間発展を計算

$$I_s = 21 \quad N = 210 \quad U = 0.05J \quad T \sim 0.01T_c$$

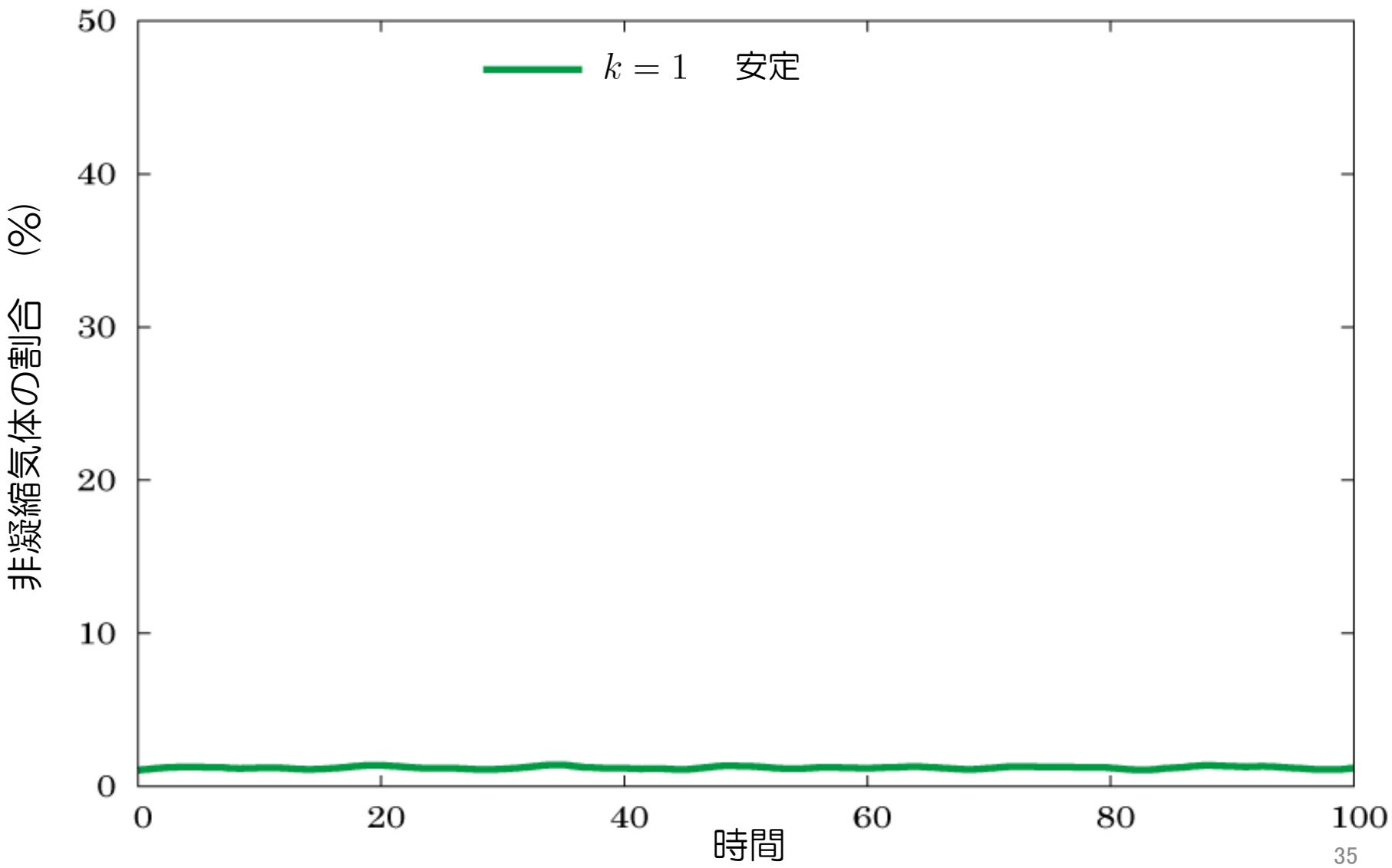
- $k = 1$ (安定な領域)
- $k = 4, 5$ (Landau不安定な領域)
- $k = 6, 7$ (動的不安定な領域)

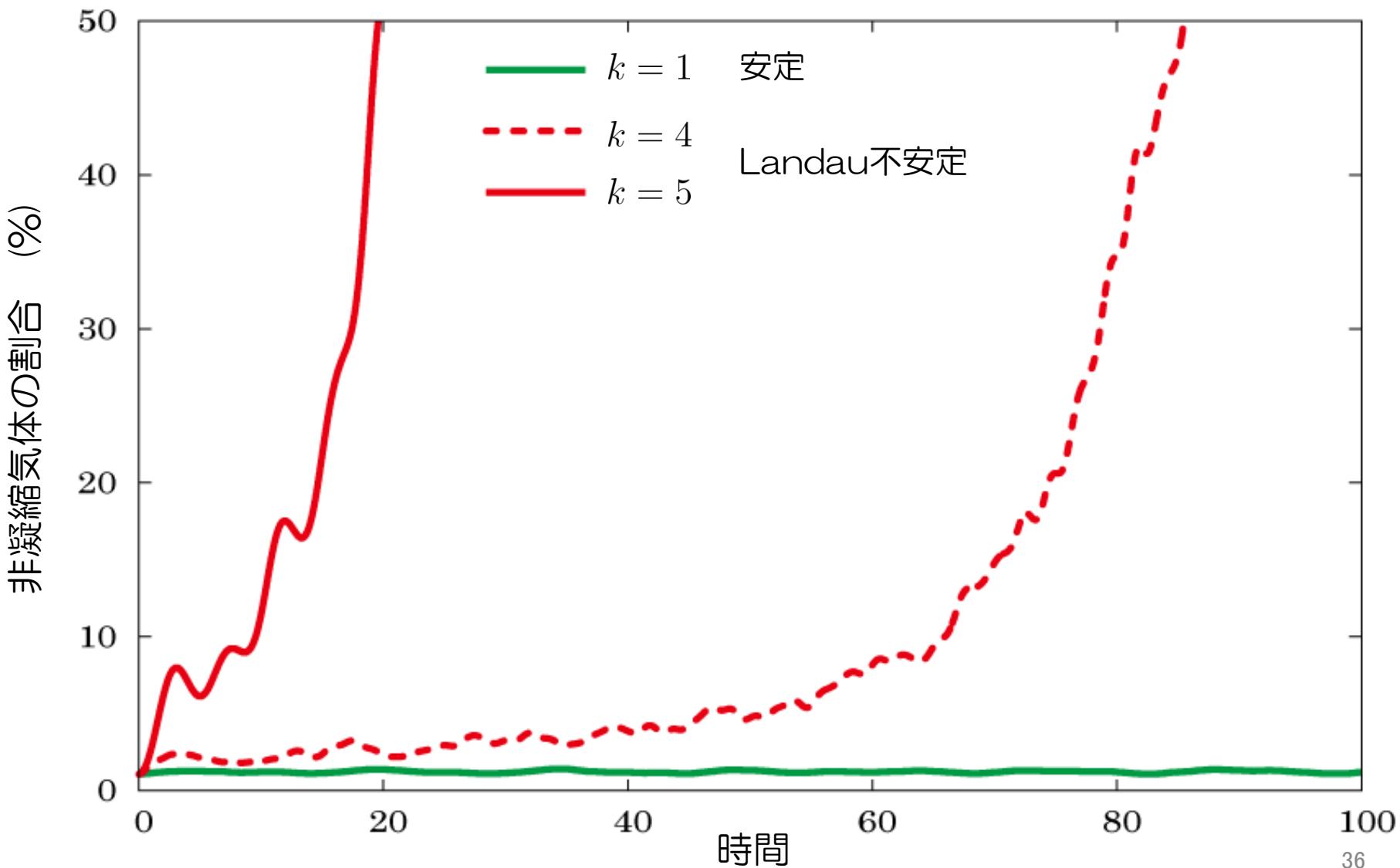


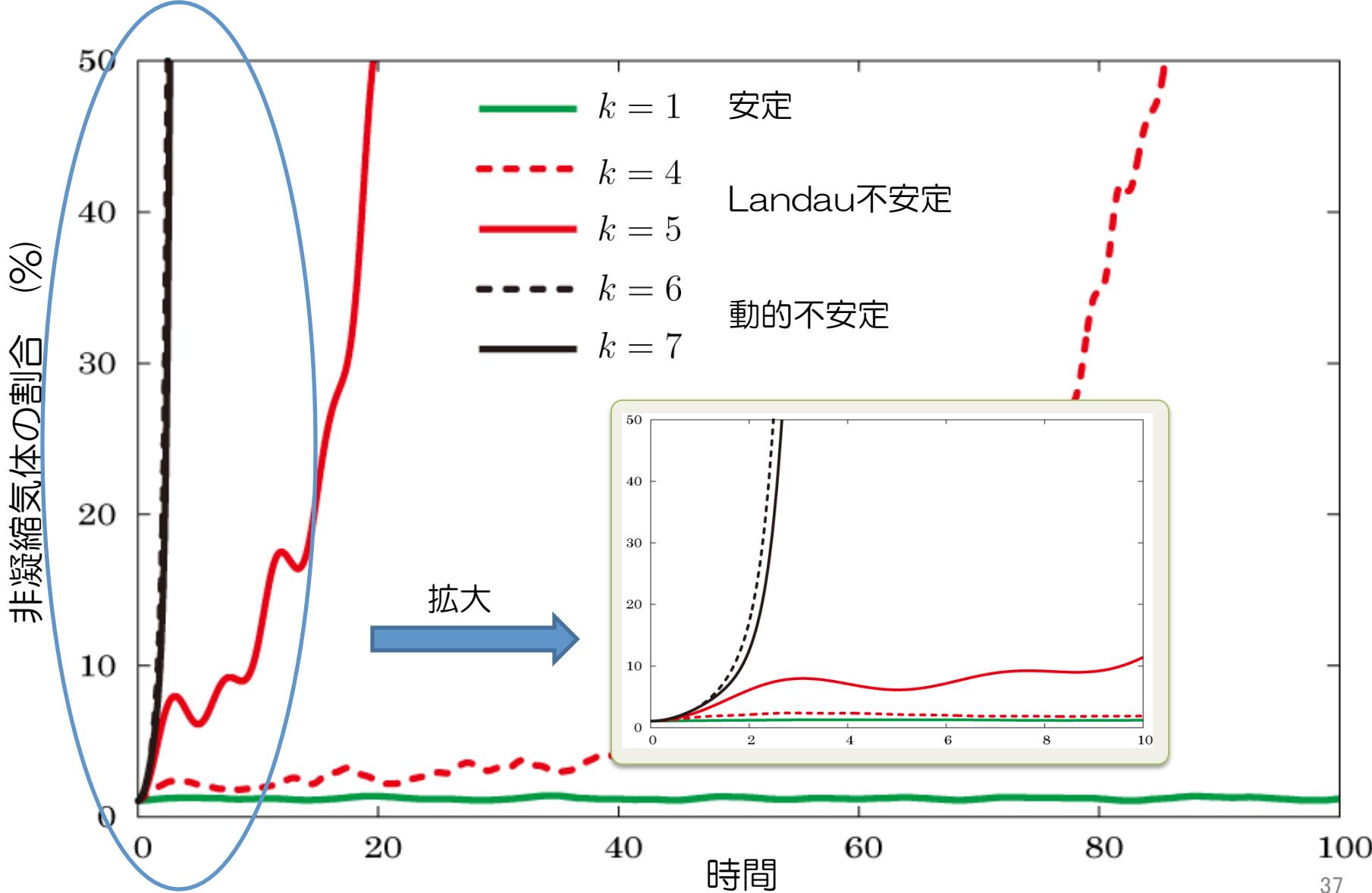
BdG固有値の相図



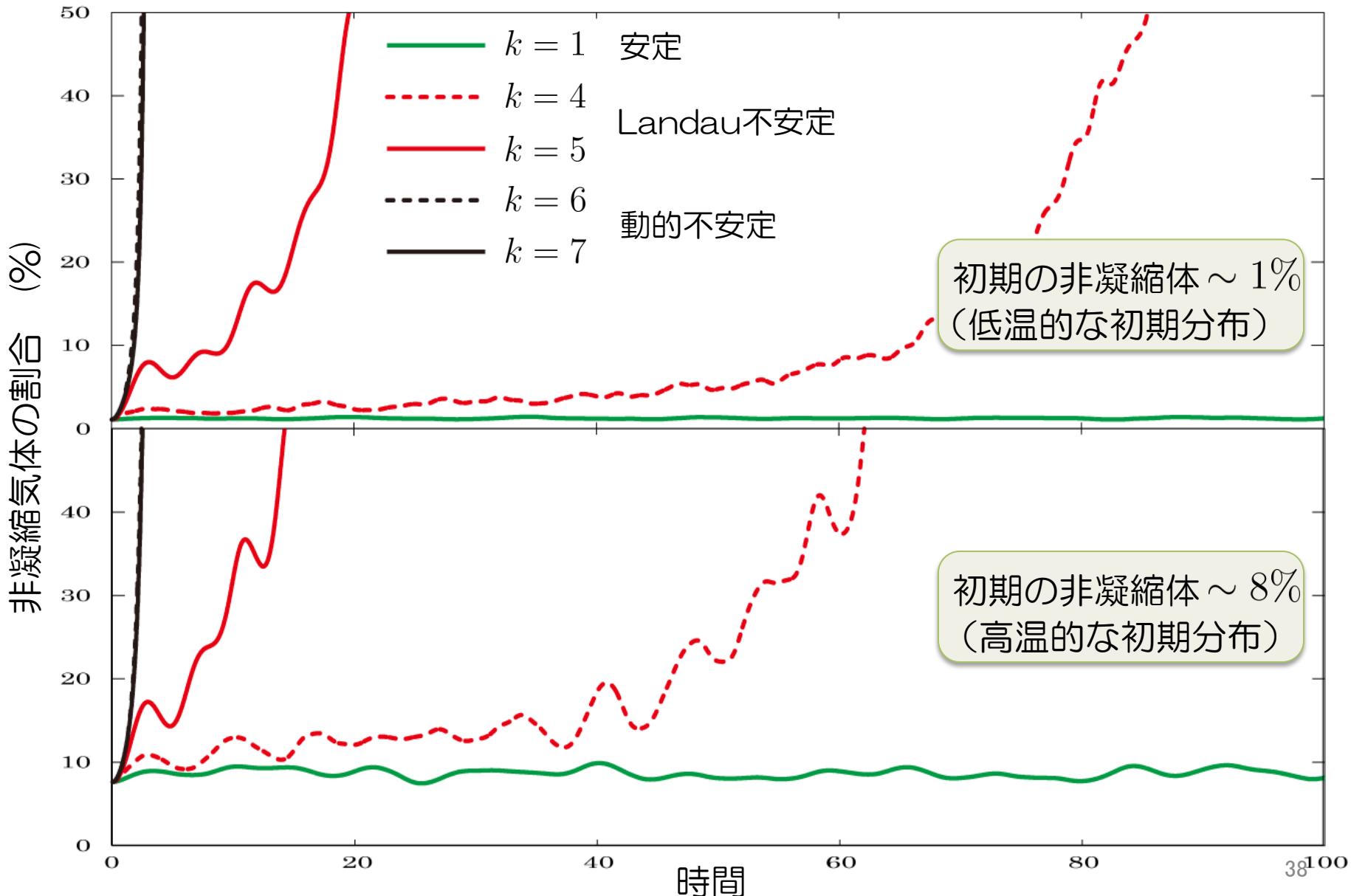
TFD







初期分布による変化



non-Markov VS Markov

角振動数 Ω の調和振動子ポテンシャルに捕捉された、凝縮体のないBose気体

量子輸送方程式 (non-Markoffian)

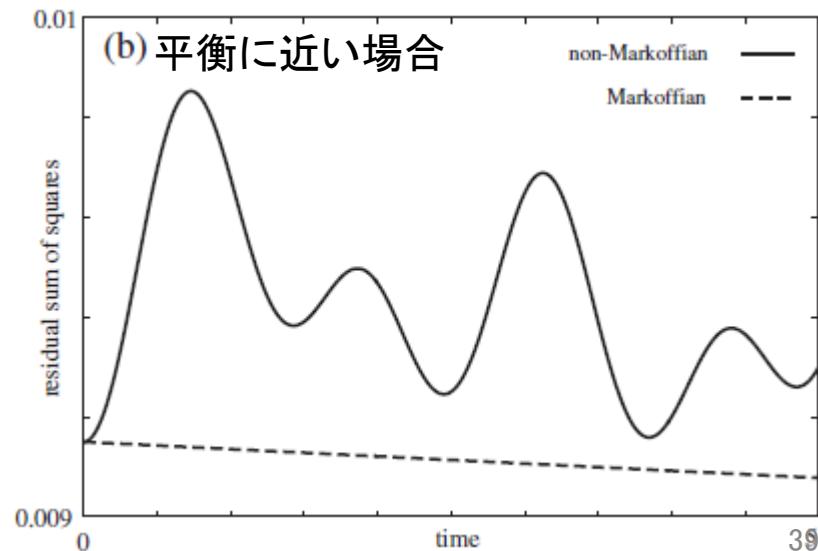
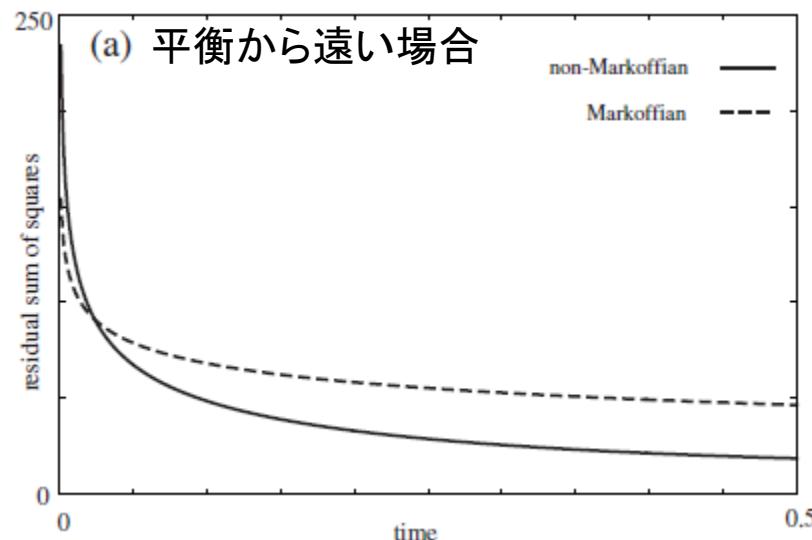
$$\omega_\ell = \Omega\ell$$

$$\dot{n}_\ell(t) = \operatorname{Re} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell} \int_{-\infty}^t ds e^{i(\omega_{\ell_1} + \omega_{\ell_2} - \omega_{\ell_3} - \omega_\ell)(t-s)} [n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3}) (1 + n_\ell) - (1 + n_{\ell_1}) (1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_\ell]_s$$

量子Boltzmann方程式 (Markoffian)

$$\dot{n}_\ell(t) = \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell} \frac{\pi \delta_{\ell_1 + \ell_2, \ell_3 + \ell}}{\Omega} [n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3}) (1 + n_\ell) - (1 + n_{\ell_1}) (1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_\ell]_t$$

残差平方和



まとめ

- 非平衡場の量子系 CPTとTFD
 - Heisenberg方程式、 2×2 Green関数、Feynman diagram法、Dyson方程式共通
 - 平衡系では同じ
 - 非平衡系では異なる
 - 導かれる量子輸送方程式も異なる (Markov vs non-Markov)
- TFD
 - マクロとミクロの共存 因果律
 - 時間変化する非摂動密度行列を追いかける相互作用描像
 - 粒子描像の時間変化 \Rightarrow 相転移
 - Feynman diagram計算可能
 - 真空場の量子論との共通性高い 例 Ward-Takahashi relation
- 冷却原子系（非相対論的）
 - 非平衡理論の検証 Y. Nakamura et al, Ann. Phys. 325, 426 (2010).
 - 不安定性を伴う非平衡 Y. Nakamura and Y. Yamanaka, Ann. Phys. 326, 1070 (2011).
- 相対論的場の量子論 Mizutani et al, Prog. Theor. Phys. 126, 681 (2011).
 - スカラー場